

l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに、以下の3条件(i), (ii), (iii)で定まる円  $C_1, C_2$  を考える。

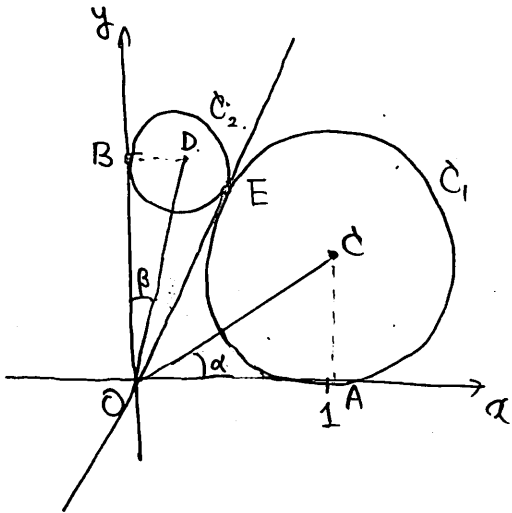
(i) 円  $C_1, C_2$  は2つの不等式  $x \geq 0, y \geq 0$  で定まる領域に含まれる。

(ii) 円  $C_1, C_2$  は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円  $C_1$  は x 軸と点 (1, 0) で接し、円  $C_2$  は y 軸と接する。

円  $C_1$  の半径を  $r_1$ , 円  $C_2$  の半径を  $r_2$  とする。 $8r_1 + 9r_2$  が最小となるような直線 l の方程式と、その最小値を求めよ。

(2015 東京大・文 図省略)



図より  $(1, 0) \in A$ ,  $C_2$  と y 軸の接点を  $B$ ,  $C_1$  の中心を  $C$ ,  $C_2$  の中心を  $D$ ,  $C_1$  と  $C_2$  の接点を  $E$  とする。

$\therefore \alpha \geq \beta$ .  $OA = OE = OB$  より、 $B$  は  $(0, 1)$  となる。

$\angle COA = \angle COE = \alpha$ ,  
 $\angle EOD = \angle DOB = \beta$  とする。

$r_1 = \tan \alpha$ ,  $r_2 = \tan \beta$  より  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} & 8 \tan \alpha + 9 \tan \beta \\ &= 8 \tan \alpha + 9 \tan \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right) \\ &= 8 \tan \alpha + 9 \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \\ &= 8 \tan \alpha + \frac{-9(1 + \tan \alpha) + 18}{1 + \tan \alpha} \\ &= 8 \tan \alpha - 9 + \frac{18}{1 + \tan \alpha} \\ &= 8 \tan \alpha + 8 + \frac{18}{1 + \tan \alpha} - 17 \end{aligned}$$

$\therefore 8 \tan \alpha + 8 > 0$ ,  $\frac{18}{1 + \tan \alpha} > 0$   
より、相加相乗平均不等式より、

$$\begin{aligned} 8 \tan \alpha + 9 \tan \beta &\geq 2 \sqrt{8(\tan \alpha + 1) \cdot \frac{18}{1 + \tan \alpha}} - 17 \\ &= 24 - 17 \\ &= 7 \end{aligned}$$

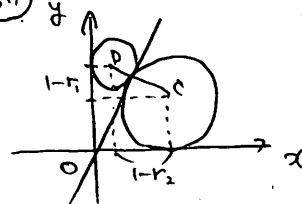
等号は、 $8(\tan \alpha + 1) = \frac{18}{1 + \tan \alpha}$   
のとき、すなわち、 $\tan \alpha > 0$  から、  
 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  のときに成り立つ。

よって最小値は 7。

$\therefore \alpha \geq \beta$ .  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3}$  より、

求める直線は  $y = \frac{4}{3}x$  となる。

(B1)



左図より

$$CD^2 = (1 - r_2)^2 + (1 - r_1)^2$$

$$\text{一方、} CD = r_1 + r_2$$

$$\text{より、} (1 - r_2)^2 + (1 - r_1)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$1 - r_1 - r_2 = r_1 r_2$$

$$r_1 > 0 \text{ より、} r_2 = \frac{1 - r_1}{1 + r_1}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} 8r_1 + 9r_2 &= 8r_1 + 9 \cdot \frac{1 - r_1}{1 + r_1} \\ &= 8r_1 + \frac{-9(r_1 + 1) + 18}{1 + r_1} \\ &= 8r_1 - 9 + \frac{18}{1 + r_1} \\ &= 8(r_1 + 1) + \frac{18}{1 + r_1} - 17 \end{aligned}$$

よって、相加相乗平均不等式より、