

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ  $\frac{1}{2}$  のコインを1枚用意し、次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ、表が出たときは文字列 AA を書き、裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば、コインを5回投げ、その結果が順に表、裏、裏、表、裏であったとすると、得られる文字列は、

AABBAAB

となる。このとき、左から4番目の文字はB、5番目の文字はAである。

(1)  $n$  を正の整数とする。 $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を求めよ。

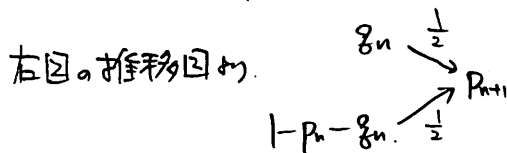
(2)  $n$  を2以上の整数とする。 $n$  回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n-1$  番目の文字が A で、かつ  $n$  番目の文字が B となる確率を求めよ。

(2015 東京大・文)

(1) 表が出たとき  $A_1$  に対し、左側のものを  $A_1$ 、右側のものを  $A_2$  とする。 $n$  番目が  $A_1$  である確率を  $p_n$ 、 $n$  番目が  $A_2$  である確率を  $g_n$  とする。

i)  $p_{n+1}$  について

$n+1$  番目が  $A_1$  であるには  $n$  番目が  $A_2$  であり、その後  $\frac{1}{2}$  の確率で  $A_1$  であるか、 $n$  番目が  $B$  であり、その後  $\frac{1}{2}$  の確率で  $A_1$  であるかのどちらかである。



$$p_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}(1-p_n-g_n) = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$$

変形して

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(p_n - \frac{1}{3})$$

よって、 $\{p_n - \frac{1}{3}\}$  は初項  $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 、公比  $-\frac{1}{2}$  の等比数列だから

$$p_n - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$

ii)  $g_{n+1}$  について

$n+1$  番目が  $A_2$  であるには、 $n$  番目が  $A_1$  であるか、 $n$  番目が  $B$  であるかのどちらかである。

$$g_{n+1} = p_n$$

よって、 $n \geq 2$  に対して

$$g_n = p_{n-1} = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$g_1 = 0$  より、 $n=1$  のときにも成立する。

よって、求める確率は

$$p_n + g_n = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$

(2)  $g_{n-1} \times \frac{1}{2}$  を計算すればよい。 $n \geq 3$  について

$$g_{n-1} \times \frac{1}{2} = p_{n-2} \times \frac{1}{2}$$

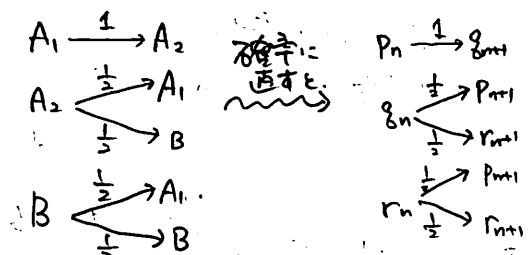
$$= \left\{ -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{3} \right\} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}$$

$n=2$  のとき、求める確率は  $0$  である。 $n=2$  のときにも成立する。よって

$$\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}$$

(参)  $n$  番目が B である確率を  $r_n$  とし、まとめると



つまり

よして.

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}r_n & \dots \textcircled{1} \\ g_{n+1} = p_n & \dots \textcircled{2} \\ r_{n+1} = \frac{1}{2}g_n + \frac{1}{2}r_n & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

とたす.

$$p_n + g_n + r_n = 1 \text{ (よ). } \textcircled{1} \text{ から}$$

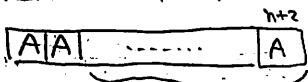
$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2}(g_n + r_n) \\ &= \frac{1}{2}(1 - p_n) \end{aligned}$$

となり,  $p_n$  のみの漸化式となる.  
あとは同様.

① 最初どうなるか. 2 場合分けする手法もあるが, 3 段階にすることが多い.

(1)  $n$  番目が A となる確率を  $p_n$  とする.

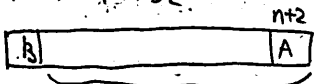
i) 1 回目が AA だと.



確率  $p_n$ .

AA だとしたら,  $n$  個目 (はじめから数えて  $n+2$  番目) が A となる確率は  $p_n$  である.

ii) 1 回目が B だと.



確率  $p_{n+1}$ .

B だとしたら,  $n$  個目 (はじめから数えて  $n+1$  番目) が A となる確率は  $p_{n+1}$  である.

i), ii) より

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}p_{n+1} \quad \dots *$$

また,  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$  である.

$$\left( \begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \dots \\ x = -\frac{1}{2}, 1 \text{ となる} \end{array} \right)$$

\* は次のように変形してやる.

$$p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

よして.

$$\begin{aligned} p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n &= p_2 + \frac{1}{2}p_1 \\ &= 1. \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また, 次のように変形してやる

$$p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n)$$

よして.

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (p_2 - p_1) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① ② より,  $p_{n+1}$  を消去して

$$p_n = \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

(2) は同様にして求めればよい.