

以下の命題A, B それぞれに対し, その真偽を述べよ. また, 真ならば証明を与え, 偽ならば反例を与えよ.

命題A:  $n$  が正の整数ならば,  $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$  が成り立つ.

命題B: 整数  $n, m, l$  が  $5n + 5m + 3l = 1$  をみたすならば,  $10nm + 3ml + 3nl < 0$  が成り立つ.

(2015 東京大・文)

[命題A]

$$f(x) = \frac{x^3}{26} + 100 - x^2 \text{ とおく.}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{26}x^2 - 2x \\ &= \frac{1}{26}x(3x - 26 \cdot 2) \end{aligned}$$

∴  $f(x)$  の増減表は

$x$	$(0)$	...	$\frac{52}{3}$	...
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$			極小	↑

$$\begin{aligned} f\left(\frac{52}{3}\right) &= \frac{1}{26}\left(\frac{52}{3}\right)^3 + 100 - \left(\frac{52}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{52}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{26} \cdot \frac{52}{3} - 1\right) + 100 \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{52}{3}\right)^2 + \frac{2700}{27} \\ &= \frac{-2 \cdot 2704 + 2700}{27} < 0. \end{aligned}$$

$$17 < \frac{52}{3} < 18 \text{ ∴ } f(17) \text{ と } f(18) \text{ を調べる.}$$

$$\begin{aligned} f(17) &= \frac{17^3}{26} + 100 - 17^2 \\ &= \left(\frac{17}{26} - 1\right) \cdot 17^2 + 100 \\ &= -\frac{9}{26} \cdot 17^2 + 100 \\ &= -\frac{1}{26} < 0. \end{aligned}$$

∴ (∴) 偽である. 反例は  $m=17$ .

※ 途中計算は因数分解すると楽.

(このように小技はわかると棒)

[命題B]

$$\text{条件より } 3l = 1 - 5(n+m).$$

∴

$$\begin{aligned} 10nm + 3ml + 3nl &< 10nm + 3l(n+m) \\ &= 10nm + \{1 - 5(n+m)\}(n+m) \\ &= 10nm + (n+m) - 5(n+m)^2 \\ &= (n+m) - 5(n^2 + m^2) \\ &\leq (n+m) - 5(|n| + |m|) \quad (\because n, m \in \mathbb{Z}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

等号は  $m=n=0$  のとき成り立つが,

このとき  $5n + 5m + 3l = 1$  をみたさず不適.

∴  $10nm + 3ml + 3nl < 0$  が成立し真である.

∴  $(n+m) - 5(n^2 + m^2)$  の時点で, この値になることはわかる. あとはどこをどう設定するかと考へたところ, 絶対値を使うことにした.

[別解]  $(n+m) - 5(n^2 + m^2)$  のつぎの通り.

$$\begin{aligned} &= -5n^2 + n - 5m^2 + m \\ &= -5\left(m - \frac{1}{10}\right)^2 - 5\left(n - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

∴ なること.

$$\left(n - \frac{1}{10}\right)^2 \geq \frac{1}{100}, \quad \left(m - \frac{1}{10}\right)^2 \geq \frac{1}{100}$$

(等号は  $n=m=0$  のとき)

∴ なること.

$$\left(n - \frac{1}{10}\right)^2 + \left(m - \frac{1}{10}\right)^2 \geq \frac{1}{50}$$

$$\text{∴ } -5\left(n - \frac{1}{10}\right)^2 - 5\left(m - \frac{1}{10}\right)^2 \leq -\frac{1}{10}$$

$$\text{∴ } -5\left(n - \frac{1}{10}\right)^2 - 5\left(m - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} \leq 0.$$

∴ 成り立つ. 等号は  $m=n=0$  のとき