

座標平面上の2点 $A(-1, 1), B(1, -1)$ を考える. また, P を座標平面上の点とし, その x 座標の絶対値は1以下であるとする. 次の条件(i), または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し, その面積を求めよ.

(i) 頂点の x 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで, 点 A, P, B をすべて通るものがある.

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある.

(2015 東京大・文)

ii) より. $x+y=0$ かつ $|x| \leq 1$ である.

i) の2次関数のグラフを.

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{とする}$$

A, B を通るから

$$\begin{cases} 1 = a - b + c \\ -1 = a + b + c \end{cases}$$

より. $c = -a, b = -1$ を得る.

よって. $y = ax^2 - x - a$ とおける.

$$a \neq 0 \text{ のとき. } y = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{4a^2 + 1}{4a}$$

よって. 頂点の x 座標の絶対値が1以上であることがあり.

$$\left| \frac{1}{2a} \right| \geq 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{|a|} \geq 1$$

よって. $|a| \leq \frac{1}{2}$ となる. つまり

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad a \neq 0$$

$y = ax^2 - x - a$ を a について変形すると,

$$x^2 \pm 1 \leq x \leq -a$$

$$a = \frac{x+y}{x^2-1}$$

よって. かつ

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x+y}{x^2-1} \leq \frac{1}{2}$$

よって. $|x| \leq 1$ より. $x^2 - 1 \leq 0$. よって.

$$-\frac{1}{2}(x^2 - x) - x \leq y \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1) - x$$

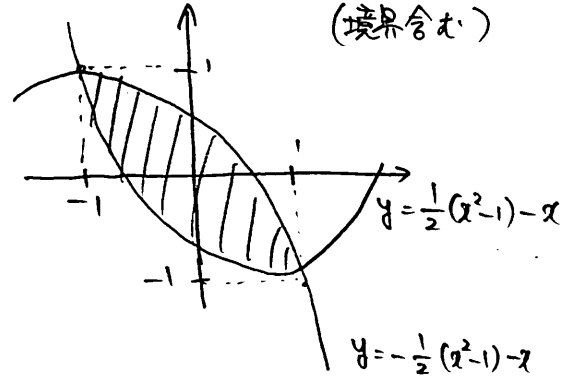
よって. ii) の条件より.

$$x = \pm 1 \text{ のときは点 } A, B \text{ である.}$$

$a = 0$ のときは原点を補うこと.

求める領域が不明.

範囲を図示すると. 図の斜線部分となる (境界含む).



従って. 求める面積は.

$$\int_{-1}^1 \left(\left\{ -\frac{1}{2}(x^2 - 1) - x \right\} - \left\{ \frac{1}{2}(x^2 - 1) - x \right\} \right) dx$$

$$= \frac{1}{6} \{ 1 - (-1) \}^3$$

$$= \frac{4}{3}$$

* 条件 ii) に目を向くと. 斜線部分が不明.

i) のとき $x < 1$ と. i) のとき $x > -1$ と.

ii) の条件で補われていることか分かる.