

正の実数  $a$  に対して、座標平面上で次の放物線を考える。

$$C: y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

$a$  が正の実数全体を動くとき、 $C$  の通過する領域を図示せよ。

(2015 東京大・理)

第1問

命題をたずねる。

$$4ay = 4ax^2 + 1 - 4a^2$$

$$4(x^2-1)a^2 - 4ay + 1 = 0 \dots *$$

この式  $a$  についての方程式をみたとき。

$a > 0$  となるような解をもつた  $a$  の  $(x, y)$

の条件を求めたい。

i)  $x^2 - 1 = 0$ , 即ち  $x = \pm 1$  のとき。

$$-4ay + 1 = 0.$$

$$y = \frac{1}{4a}$$

$a$  は正の実数全体を動くとき  $y > 0$ .

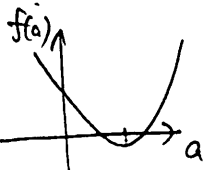
ii)  $x^2 - 1 \neq 0$  のとき。

$$* \text{より } a^2 - \frac{y}{x^2-1}a + \frac{1}{4(x^2-1)} = 0.$$

この式の左辺を  $f(a)$  とする。

$$\begin{aligned} f(a) &= \left| a - \frac{y}{2(x^2-1)} \right|^2 - \frac{y^2}{4(x^2-1)^2} + \frac{1}{4(x^2-1)} \\ &= \left| a - \frac{y}{2(x^2-1)} \right|^2 + \frac{x^2 - y^2 - 1}{4(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

(p)  $\frac{y}{2(x^2-1)} > 0$  のとき。



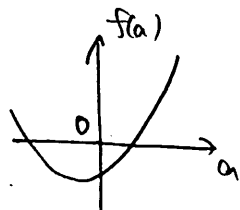
すなわち  $y(x^2-1) > 0$  のとき。

(両方に  $2(x^2-1)^2$  をかけた)

$$\frac{x^2 - y^2 - 1}{4(x^2-1)^2} \leq 0$$

$$4(x^2-1)^2 > 0 \text{ より } x^2 - y^2 \leq 1$$

(1)  $\frac{y}{2(x^2-1)} < 0$  のとき



すなわち  $y(x^2-1) < 0$  のとき。

$$f(a) < 0 \text{ あり}$$

$$\frac{1}{4(x^2-1)} < 0$$

$$x^2 - 1 < 0$$

$$-1 < x < 1$$

また  $y > 0$ .

$$x = \pm 1 \text{ のとき } y > 0.$$

$$x \neq \pm 1 \text{ のとき } y(x^2-1) > 0 \text{ かつ } x^2 - y^2 \leq 1$$

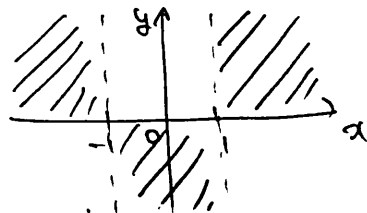
または

$$y(x^2-1) < 0 \text{ かつ } -1 < x < 1$$

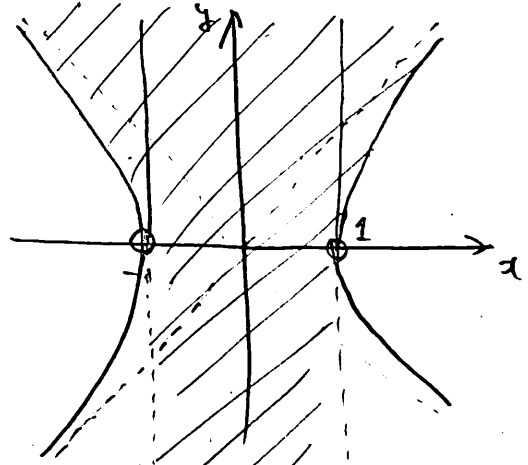
よって  $y(x^2-1) > 0$  は

$$(y > 0 \text{ かつ } x^2 - 1 > 0) \text{ または } (y < 0 \text{ かつ } x^2 - 1 < 0)$$

となり、図の斜線部分が (境界含まず)



となり、 $y(x^2-1) < 0$  も同様に考え、求める領域は



図の斜線部分、境界は

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ の } y > 0 \text{ の部分のみ含む}$$

(\*) 本式を  $4(x^2-1)^2$  でかけると、  
上凸下凸の場合分けが必要。