

どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し、次のように左から順に文字を書く。
 さいころを投げ、出た目が1, 2, 3のときは文字列 AA を書き、4のときは文字 B を、5のときは文字 C を、6のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ、同じ規則に従って AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。
 たとえば、さいころを5回投げ、その結果が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると、得られる文字列は、

AACDAAB

となる。このとき、左から4番目の文字は D, 5番目の文字は A である。

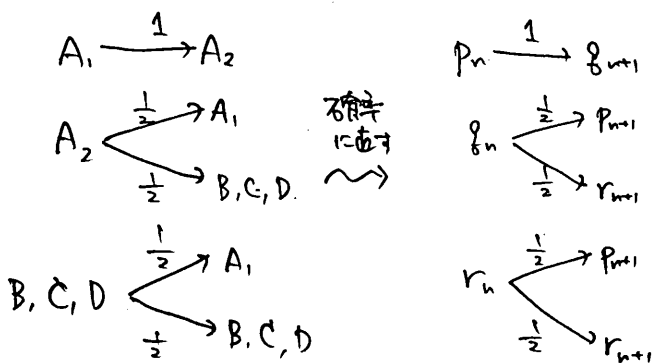
- (1) n を正の整数とする。 n 回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2) n を2以上の整数とする。 n 回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で、かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

(2015 東京大・理) 第2問

※ 文字列 a と b も参照

(1) 表が出たとき「AA」に一致。

左側1文字が A, 右側1文字が A とする
 n 番目が A である確率を p_n
 n 番目が A である確率を q_n
 B, C, D になる確率を r_n とする。



$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n & \dots (1) \\ q_{n+1} = p_n & \dots (2) \\ r_{n+1} = \frac{1}{2} q_n + \frac{1}{2} r_n & \dots (3) \end{cases}$$

$p_n + q_n + r_n = 1$ より $q_n + r_n = 1 - p_n$

だから (1) より

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2} (q_n + r_n) \\ &= \frac{1}{2} (1 - p_n) \end{aligned}$$

整理して

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} (p_n - \frac{1}{3})$$

$$\begin{aligned} \text{よって } p_n - \frac{1}{3} &= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ p_n &= -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

また $q_{n+1} = p_n$ より $n \geq 2$ に対して
 $q_n = p_{n-1}$

よって 求める確率 $p_n + q_n$ は

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= p_n + p_{n-1} \\ &= \dots = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$p_1 + q_1 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ なる $n=1$ のときも成立

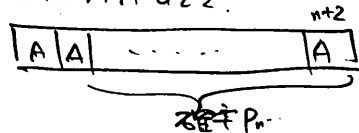
(2) $q_{n-1} \times \frac{1}{6}$ を計算すればよい。 $n \geq 3$ に対して

$$q_{n-1} \times \frac{1}{6} = p_{n-2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \left\{ -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 1 \right\}$$

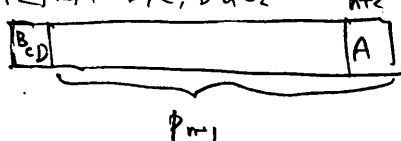
$n=2$ のとき 0 になるから $n=2$ で成立する

③ 最初の場合も含めて n 番目が A になる確率を p_n とする

i) 1回目 AA のとき



ii) 1回目 B, C, D のとき



よって $p_{n+2} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2} p_{n+1}$ を解くと