

a を正の実数とし、 p を正の有理数とする。

座標平面上の2つの曲線 $y = ax^p (x > 0)$ と $y = \log x (x > 0)$ を考える。この2つの曲線の共有点が1点のみであるとし、その共有点を Q とする。

以下の間に答えよ。必要であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この2つの曲線と x 軸で囲まれる図形を、 x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

(2015 東京大・理)

第3問

(1) 2つの曲線の共有点が1点のみであるから、 $ax^p = \log x$... *
 かつ、 $x > 0$ について、ただ1つ解をもつ。
 $x^p \neq 0$ より、変形して

$$a = \frac{\log x}{x^p}$$

よって、 $f(x) = \frac{\log x}{x^p}$ とする。

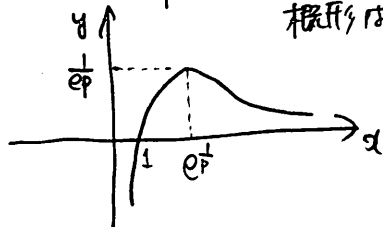
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p \log x} = 0$$

$$f'(x) = \frac{x^{p-1} - (\log x) \cdot px^{p-1}}{x^{2p}} = \frac{1 - p \log x}{x^{p+1}}$$

増減表は

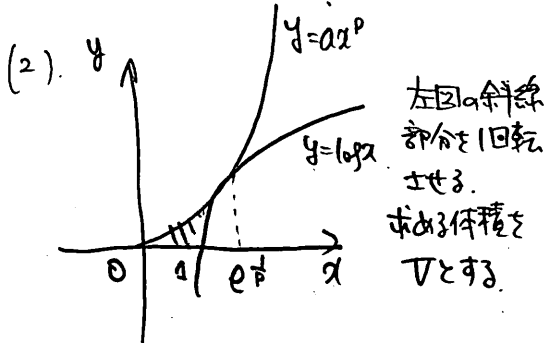
x	(0)	...	$e^{1/p}$...
$f(x)$		+	0	-
$f'(x)$		↑	極大	↓

$f(e^{1/p}) = \frac{1}{e^p}$ より、 $y = f(x)$ のグラフの概形は下図



* かつ、ただ1つ解をもつのは、
 $y = f(x)$ と $y = a$ が交点をもつのは、
 $a > 0$ より $a = \frac{1}{e^p}$ とする。

Q の x 座標は $e^{1/p}$



$$V = \pi \int_0^{e^{1/p}} \left(\frac{1}{e^p} x^p\right)^2 dx - \pi \int_1^{e^{1/p}} (\log x)^2 dx$$

$$\therefore \int_0^{e^{1/p}} \left(\frac{1}{e^p} x^p\right)^2 dx = \frac{1}{e^{2p}} \left[\frac{1}{2p+1} x^{2p+1} \right]_0^{e^{1/p}} = \frac{1}{(2p+1)e^{2p}} e^{2+1/p}$$

$$\int_1^{e^{1/p}} (\log x)^2 dx = [x(\log x)^2]_1^{e^{1/p}} - \int_1^{e^{1/p}} x(2 \log x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= e^{1/p} \cdot \frac{1}{p^2} - 2[x \log x - x]_1^{e^{1/p}} = \frac{1}{p^2} e^{1/p} - 2\left(\frac{1}{p} e^{1/p} - e^{1/p} + 1\right)$$

よって

$$V = \pi \left\{ \frac{1}{(2p+1)e^{2p}} e^{2+1/p} - \frac{1}{p^2} e^{1/p} + 2\left(\frac{1}{p} e^{1/p} - e^{1/p} + 1\right) \right\}$$

$$= \pi \left[e^{1/p} \left\{ \frac{1}{(2p+1)e^{2p}} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} - 2 \right\} + 2 \right]$$

$$= \pi \left\{ e^{1/p} \cdot \frac{-4p^3 + 2p^2}{(2p+1) \cdot p^2} + 2 \right\}$$

$$= \pi \left(\frac{-4p+2}{2p+1} e^{1/p} + 2 \right)$$

(3) $V = 2\pi$ より

$$\frac{-4p+2}{2p+1} e^{1/p} = 0$$

$$e^{1/p} > 0 \text{ より } p = \frac{1}{2}$$

⊗ 共有点が1点 \Rightarrow 接するは危険

$y = ax^p$ は p の値により上凸にも下凸にもなる。

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ から、定数分離 a の方向性は自然