

数列  $\{p_n\}$  を次のように定める.

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1)  $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$  が  $n$  によらないことを示せ.

(2) すべての  $n = 2, 3, 4, \dots$  に対し,  $p_{n+1} + p_{n-1}$  を  $p_n$  のみを使って表せ.

(3) 数列  $\{q_n\}$  を次のように定める.

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $p_n = q_{2n-1}$  を示せ.

(2015 東京大・理 第 4 問)