

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める.

$$p_1 = 1, p_2 = 2, p_{n+2} = \frac{p^2_{n+1} + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $\frac{p^2_{n+1} + p^2_n + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ.

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \dots$ に対し, $p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ.

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める.

$$q_1 = 1, q_2 = 1, q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $p_n = q_{2n-1}$ を示せ.

(2015 東京大・理第4問)

(1) $a_n = \frac{p^2_{n+1} + p^2_n + 1}{p_{n+1}p_n}$ とする. $a_{n+1} = a_n$ を示せばよい.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{p^2_{n+2} + p^2_{n+1} + 1}{p_{n+2}p_{n+1}} \\ &= \frac{\left(\frac{p^2_{n+1} + 1}{p_n}\right)^2 + p^2_{n+1} + 1}{\frac{p^2_{n+1} + 1}{p_n} \cdot p_{n+1}} \\ &= \frac{(p^2_{n+1} + 1)^2 + p^2_{n+1}(p^2_{n+1} + 1)}{p_n \cdot p_{n+1} (p^2_{n+1} + 1)} \\ &= \frac{p^2_{n+1} + 1 + p_n^2}{p_n \cdot p_{n+1}} \\ &= a_n \end{aligned}$$

よって示された.

(2) $a_n = a_1$ より.

$$\frac{p^2_{n+1} + p^2_n + 1}{p_{n+1}p_n} = \frac{p^2_2 + p^2_1 + 1}{p_2 \cdot p_1} = 3$$

より $p^2_{n+1} + p^2_n + 1 = 3p_{n+1}p_n$ を得る. *

漸化式より $p_{n+1} = \frac{p^2_n + 1}{p_{n-1}}$ となる.

$$p^2_n + 1 = p_{n+1} \cdot p_{n-1}$$

これを*にあてはめると.

$$p^2_{n+1} + p_{n+1}p_{n-1} = 3p_{n+1}p_n$$

p_{n+1} は帰納的に 0 に等しくないから

$$p_{n+1} + p_{n-1} = 3p_n$$

(3) 数学的帰納法で示す.

i) $m = 1$ のとき.

$$p_1 = 1, q_1 = 1 \text{ より成り立つ.}$$

$m = 2$ のとき.

$$p_2 = 2, q_{2 \cdot 2 - 1} = q_3 = 2 \text{ より成り立つ.}$$

ii) $m = k-1, k \geq 3$

$$p_{k-1} = q_{2(k-1)-1}, p_k = q_{2k-1}$$

より成り立つと仮定する. $k \geq 3$ のとき.

$$p_{k+1} = q_{2(k+1)-1} = q_{2k+1} \text{ より成り立つことを示せばよい.}$$

$$p_{k+1} = 3p_k - p_{k-1}$$

$$= 3q_{2k-1} - q_{2k-3} \quad (\text{仮定})$$

$$= 3q_{2k-1} - (q_{2k-1} - q_{2k-2}) \quad (q_{n+2} = q_{n+1} + q_n)$$

$$= 2q_{2k-1} + q_{2k-2}$$

$$= 2q_{2k-1} + (q_{2k} - q_{2k-1}) \quad (\quad)$$

$$= q_{2k-1} + q_{2k} \quad (\quad)$$

$$= q_{2k+1}$$

より $m = k+1$ のときも成り立つ. i), ii) より示された.

(3) ii) のとき.

$$p^2_{n+1} + p^2_n + 1 = 3p_n p_{n+1}$$

$$-) p^2_n + p^2_{n-1} + 1 = 3p_{n-1} p_n$$

$$p^2_{n+1} - p^2_n = 3p_n (p_{n+1} - p_{n-1})$$

より示さうとしたら $p_{n-1} \neq p_{n+1}$ は明らかではないから
よきよき. 方針変更をする.