

m を 2015 以下の正の整数とする. ${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m を求めよ.

(2015 東京大・理第 5 問)

$${}_{2015}C_m = \frac{2015 \times 2014 \times \cdots \times (2015 - m + 1)}{m \times (m-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

とすると

$$2015 = 2016 - 1 = 2^5 \cdot 63 - 1$$

とみれば、次のようにかける。(途中は k を用いた)

$${}_{2015}C_m = \frac{2^5 \cdot 63 - 1}{1} \cdot \frac{2^5 \cdot 63 - 2}{2} \cdot \frac{2^5 \cdot 63 - 3}{3} \cdot \frac{2^5 \cdot 63 - 4}{4} \cdots \frac{2^5 \cdot 63 - k}{k} \cdots \frac{2^5 \cdot 63 - m}{m}$$

$$\text{ここで } \frac{2^5 \cdot 63 - 2}{2} = \frac{2 \cdot (2^4 \cdot 63 - 1)}{2} = 2^4 \cdot 63 - 1$$

$$\frac{2^5 \cdot 63 - 4}{4} = \frac{2^2 \cdot (2^3 \cdot 63 - 1)}{2} = 2^3 \cdot 63 - 1$$

とすると、これは奇数である。つまり、 $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ までの整数とすると、 $k = 2^l \cdot a$ とし、

$$\frac{2^5 \cdot 63 - 2^l}{2^l} = 2^{l-1} \cdot 63 - 1 \quad (\text{奇数})$$

とすると、その他の k に対しては、分母分子ともに奇数となる。すなわち、 $2^5 = 32$ より

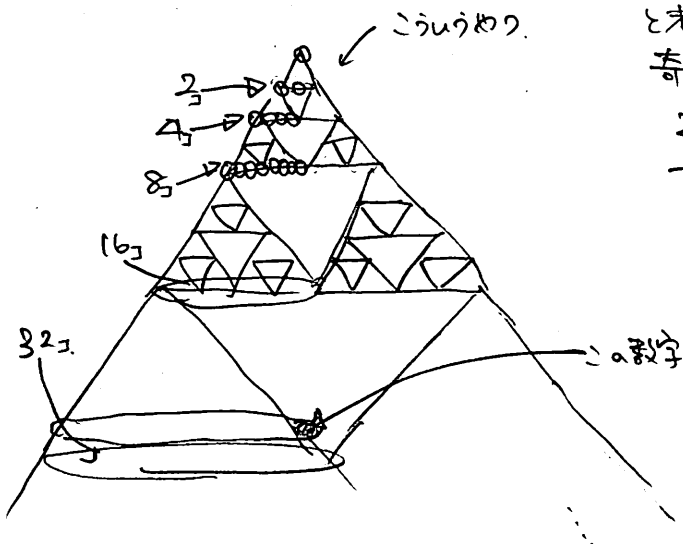
${}_{2015}C_1, {}_{2015}C_2, \dots, {}_{2015}C_{31}$ は全て奇数である。

$${}_{2015}C_{32} = \frac{2^5 \cdot 63 - 1}{1} \cdot \frac{2^5 \cdot 63 - 2}{2} \cdots \frac{2^5 \cdot 63 - 32}{32}$$

とすると、 $\frac{2^5 \cdot 63 - 32}{32} = 62$ となり、 ${}_{2015}C_{32}$ は偶数である。

よって、 $m = 32$

⑧ 1024 個の三角形で、奇数の色をぬると、シェルピンスキーのギャスケットになる。



と考えると、2016 段目は、左から 31 番目までの奇数になる。という意味になる。

2015 年の 2015 という数字は、左から数えたときに、一桁が長く、問題に適した数字である。