

n を正の整数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし, p, q を実数とする. $|x| \leq \frac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leq f(x) \leq q$ が成り立つとき, 次の不等式を示せ.

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める.

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$$

(2015 東京大・理第6問)