

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし、 p, q を実数とする。 $|x| \leq \frac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leq f(x) \leq q$ が成り立つとき、次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$$

(2015 東京大・理第6問)

(1) $|x| > 1$ のとき $g(x) = 0$ であるから

$g(nx)$ は $x < -\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} < x < 1$ において 0 である。逆に $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ においては

$$g(nx) = \frac{\cos(\pi x) + 1}{2}$$

である。また $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ であるとき

$$g(nx) \geq 0 \text{ かつ } p \leq f(x) \leq q \text{ かつ}$$

$$g(nx) \cdot p \leq g(nx) f(x) \leq g(nx) \cdot q$$

が成り立つ。また

$$\int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx$$

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) \cdot p dx \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) \cdot q dx$$

が成り立つ。よって

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) + x \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} = \frac{1}{n} \text{ かつ}$$

$$\frac{1}{n} \cdot p \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx \leq \frac{1}{n} \cdot q$$

$$\therefore p \leq n \cdot \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) $g'(x) = h(x)$ が成り立つから

$$n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$$

$$= n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx) \cdot \log(1 + e^{x+1}) dx$$

$$= n^2 \left\{ \left[\frac{1}{n} g(nx) \cdot \log(1 + e^{x+1}) \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \right.$$

$$\left. - \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} g(nx) \cdot \frac{1}{1 + e^{x+1}} e^{x+1} dx \right\}$$

$$= -n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) \left(1 - \frac{1}{1 + e^{x+1}} \right) dx$$

ここで $f(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{x+1}}$ とする。

$f(x)$ は連続で、単調増加である。

$f(x) \geq 0$ である。

また、 $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ である。

$$f(-\frac{1}{n}) \leq f(x) \leq f(\frac{1}{n})$$

つまり、(1) の結果より、

$$-f(\frac{1}{n}) \leq -n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(x) f(x) dx \leq -f(-\frac{1}{n})$$

とある。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+e^{\frac{1}{n}+1}} \right)$$

$$= \frac{e}{1+e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(-\frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}} \right)$$

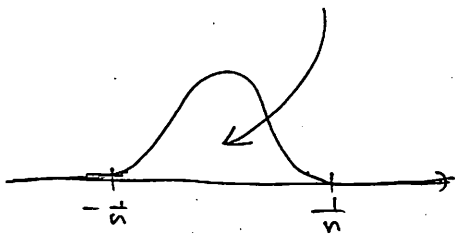
$$= \frac{e}{1+e}$$

より、はさみうちの原理から

求める極限は

$$-\frac{e}{1+e}$$

(7) $g(x), h(x)$ は



このように、 $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ の幅以外
は 0 である。

とすれば $\int_{-1}^1 g(x) f(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(x) f(x) dx$ にかえても問題ない。

☒ は解答にかかっていたが、
大体のイメージを持って計算すること。