

(東大後期 試行テスト 総合科目 問題 A)

(A-1) n 組のデータ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ が与えられているとし、これらのデータには

$$y_k = ax_k + b \quad (1)$$

という1次の関係が成り立つことが分かっているとす。ただし、 a と b は k に依らない定数とする。ここで、ある k ($k \geq 2$) に対して、それぞれ次の3つの状況を考える。

(i). $x_k = 2x_1, y_k = 2y_1$

(ii). $ab \neq 0$ の知識のもとで $x_k > x_1, y_k < y_1$

(iii). $b < 0$ の知識のもとで $x_1 < 0, y_1 > 0, x_k > 0, y_k > 0$

これらの状況には、ある不可条件のもとで成立しうるものと、成立しえないものがある。せりつしうるものについては、そのための必要十分条件を以下のリストから選び、理由を説明せよ。また、成立しえないものについては、そのことを証明せよ。

条件: (ア) $a > 0$ (イ) $a = 0$ (ウ) $a < 0$ (エ) $b > 0$

(オ) $b = 0$ (カ) $b < 0$

前問の y_k が雑音 v_k によって汚され、以下の関係式で得られる z_k が観測されたとする。

$$z_k = y_k + v_k \quad (2)$$

いま、ある $c > 0$ に対して、 $|v_k| \leq c$ ($k = 1, 2$) が成立していると仮定し

$$(x_1, z_1) = (1.0, 0.5), (x_2, z_2) = (-1.0, 2.0)$$

が観測されたとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(A-2) $c = 1$ とするとき、 a と b の内、符号が決定できるものを挙げ、その符号を示せ。

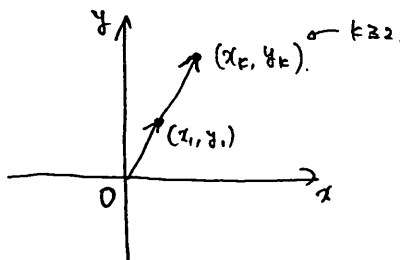
(A-3) この2つのデータだけから、 a と b の符号が一意に定まるために必要となる c の条件を求めよ。

(A-4) $a > 0$ と $b < 0$ という事前知識があったとする。このデータが観測されるために c が満たすべき条件を求めよ。

(A-1)

i) $x_k = 2x_1, y_k = 2y_1$

お). (x_1, y_1) が第1象限にあるときには、下図のようになる



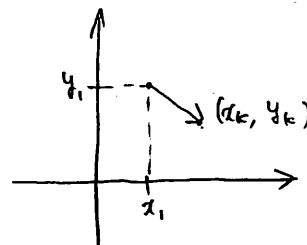
$k \geq 2$ ときには常に $(2x_1, 2y_1)$ に近づき点になり、全2点の

$y_k = ax_k$ 上に存在する。

(x_1, y_1) が他象限もしくは軸上でも同様に考えればよい。

よって $b = 0$ (オ)

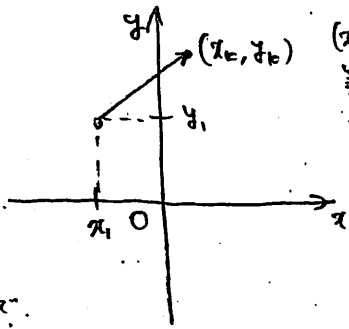
ii) $ab \neq 0$ とき $x_k > x_1, y_k < y_1$



i) 同様に図示すると、 (x_k, y_k) は上図のようなベクトル方向のみに存在する。

よって $a < 0$ (ウ)

iii) $b < 0$ $x_1 < 0$, $y_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_2 > 0$.



(x_1, y_1) は第2象限に存在する。

$k \geq 2c$.

$x_2 > 0$, $y_2 > 0$ かつ、 c より小さい値は第1象限のみが存在する。このとき

(x_1, y_1) と (x_2, y_2) は必ず、 y 軸の正の部分を交わらさず、 $b < 0$ となる。

以上より、成立しない。

(A-2). $z_F = y_C + U_F$.

①. $z_F = (ax_C + b) + U_F$.

②. 観測結果を代入すると。

$$0.5 = (a+b) + U_1$$

$$2.0 = (-a+b) + U_2$$

$$|U_1| \leq 1 \text{ かつ } -1 \leq U_1 \leq 1, -1 \leq U_2 \leq 1$$

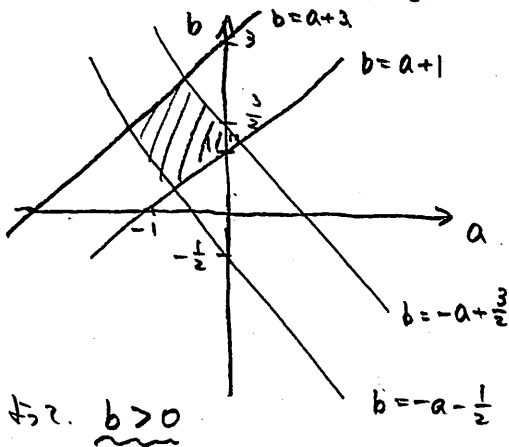
$$\begin{cases} -1 \leq -a-b+\frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq a-b+2 \leq 1 \end{cases}$$

③. $c = 1, 7$.

$$-\frac{3}{2} \leq -a-b \leq \frac{1}{2}$$

$$-3 \leq a-b \leq -1$$

④. c は ab 平面に図示すると。



⑤. $b > 0$

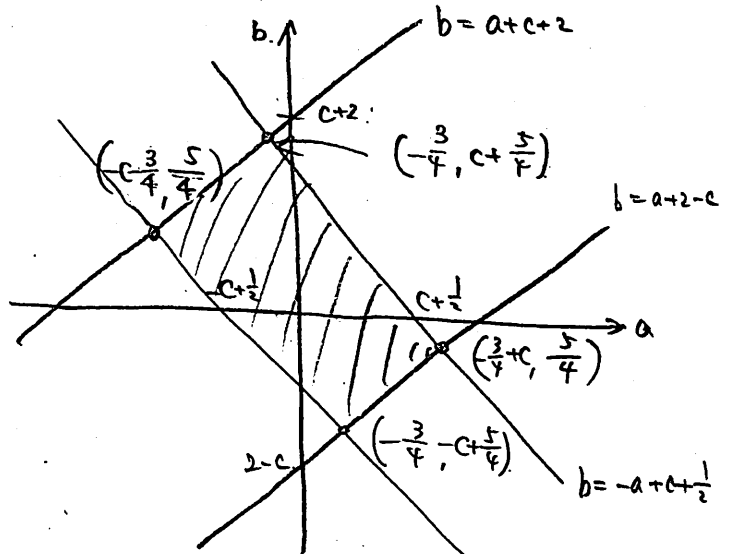
(A-3) (A-2) の途中式より。

$$\begin{cases} -c \leq -a-b+\frac{1}{2} \leq c \quad \dots ① \\ -c \leq a-b+2 \leq c \quad \dots ② \end{cases}$$

① かつ $b \leq -a+c+\frac{1}{2}$ かつ $-a-c+\frac{1}{2} \leq b$.

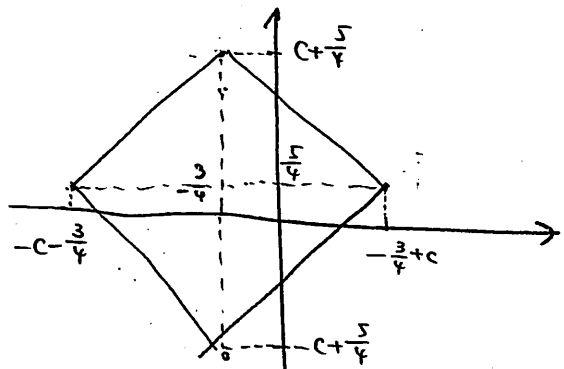
② かつ $b \leq a+c+2$ かつ $a+2-c \leq b$.

⑥. ab 平面に図示すると。



(交点の座標はあとから求めておく) 上図は正確ではない

⑦. c は ab 平面に図示すると。

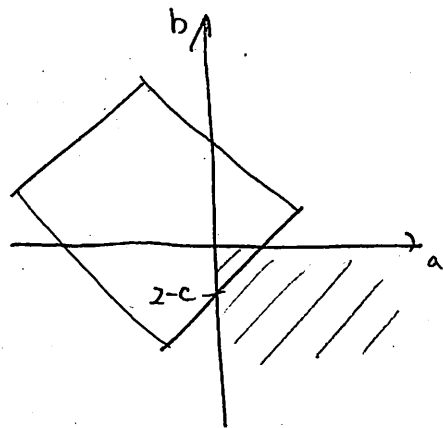


⑧. $-c+\frac{5}{4} > 0$ かつ $-\frac{3}{4}+c < 0$.

⑨.

$$0 < c < 0.75$$

(A-4). $a > 0, b < 0$.



上図より. $2-c < 0$

すなわち $a > 0, b < 0$

の範囲に領域が存在する
から.

$$\underline{2 < c}$$

* みために負けず、きちんと解析
すれば、そこで難にはない。

(東大後期 試行テスト 総合科目 問題 B)

ある農作物は毎年秋に収穫され市場に出回る. k 年目($k = 1, 2, \dots$)に農産物が1単位あたりの市場価格 p_k 円で取引される場合,その年の需要は $10 - p_k$ 単位であるとする.ここで, p_k は $2 \leq p_k \leq 10$ をみたす実数である.生産者は,農産物の生産に1年を費やすため, k 年目の供給量を $k - 1$ 年目に決める.生産者は k 年目の市場価格を q_k 円と予想して,その年の供給を $q_k - 2$ 単位に決める.ここで,予想価格 q_k は $2 \leq q_k \leq 10$ をみたす実数とする.市場価格 p_k は,需要と供給を均衡させる実数値,すなわち等式

$$10 - p_k = q_k - 2 \quad (3)$$

をみたす値,に定められる.また,生産者が k 年目の市場価格を正しく予想した場合の市場価格を s とする.

以下の4つの設問においては,生産者が市場価格を正しく予想できるとは限らないことを前提とする.生産者は, k 年目の市場価格 q_k を, q_{k-1} と p_{k-1} をもとに

$$q_k = q_{k-1} + \alpha(p_{k-1} - q_{k-1}) \quad (4)$$

と予想する.ここで, α は $0 < \alpha \leq 1$ をみたす実数である.

(B-1) p_k と p_{k-1} が等式 $p_k = ap_{k-1} + b$ の関係にあることを示し, a, b を α で表せ.

(B-2) 市場価格について不等式

$$p_1 < p_2 > p_3 < p_4 > p_5 < \dots$$

が成立していたとしよう. α の取りうる範囲を求めよ.

(B-3) $\alpha \neq 1$ のとき,常に不等式

$$|p_1 - s| > |p_2 - s| > |p_3 - s| < \dots$$

が成立することを証明せよ.

(B-4) 奇数年目の市場価格が常に4.2であった,すなわち

$$p_1 = 4.2, p_3 = 4.2, p_5 = 4.2, \dots$$

としよう.偶数年の市場価格 p_2, p_4, p_6 を求めよ.

※ 問題文を整理しやすそう.

市場価格	需要
p_k	$10 - p_k$
生産者予想	供給
q_k	$q_k - 2$

$$\begin{aligned} 10 - p_k &= q_k - 2 \\ p_k &= 12 - q_k \\ q_k &= 12 - p_k \end{aligned}$$

(B-1). (3), (4) より

$$\begin{aligned} p_k &= 12 - q_k \\ &= 12 - \{q_{k-1} + \alpha(p_{k-1} - q_{k-1})\} \\ &= 12 - \{12 - p_{k-1} + \alpha p_{k-1} - \alpha(12 - p_{k-1})\} \\ &= (1 - 2\alpha)p_{k-1} + 12\alpha \end{aligned}$$

よって $a = 1 - 2\alpha, b = 12\alpha$

(B-2). 条件は

$p_2 - p_1 > 0, p_3 - p_2 < 0, \dots$
と符号が交互に逆になることである.

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= (1 - 2\alpha)p_k + 12\alpha \\ \Rightarrow p_k &= (1 - 2\alpha)p_{k-1} + 12\alpha \end{aligned}$$

$$p_{k+1} - p_k = (1 - 2\alpha)(p_k - p_{k-1})$$

よって,正負が交互に逆になるためには $\alpha < 1/2$

$$p_2 - p_1 > 0 \text{ かつ } 1 - 2\alpha < 0$$

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &= (1 - 2\alpha)p_1 + 12\alpha - p_1 \\ &= -2\alpha p_1 + 12\alpha \end{aligned}$$

$$-2\alpha p_1 + 12\alpha > 0 \quad \because \alpha > 0 \text{ (1)}$$

$$p_1 < 6.$$

$$\text{よ} \cdot \cdot (p_1 < 6 \text{ (2)}) \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1.$$

(注). 「成立しなくてはならぬ」とあるが、
 $p_1 < 6$ は成り立つならば α のとらえ方。

(B-3). 正しく予想した市場価格 p とは、

$$p_k = p_{k+1} = p$$

とあることを用いる。よって (3) に代入して

$$p = 6.$$

よって (B-2) で求めた漸化式より

$$p_{k+1} = (1-2\alpha)p_k + 12\alpha.$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha = (1-2\alpha)\alpha + 12\alpha \quad \alpha < 1 \\ \alpha = 6 \text{ となる} \end{array} \right)$$

$$p_{k+1} - 6 = (1-2\alpha)(p_k - 6)$$

$$|p_{k+1} - 6| = |1-2\alpha| |p_k - 6|$$

よって $\alpha \neq 1$ より $0 < \alpha < 1$

よって

$$-1 < 1-2\alpha < 1$$

$$0 \leq |1-2\alpha| < 1$$

よって

$$|p_{k+1} - 6| < |p_k - 6|$$

が成り立つ。よって

$$|p_1 - 6| > |p_2 - 6| > \dots \text{ が示された。}$$

(B-4). (B-3) より $\alpha \neq 1$ ならば

$$|p_1 - p| > |p_2 - p|$$

となるが、 $p_1 = p_2$ より、この式は成立

しない。よって $\alpha = 1$ のときのみ、この状況

が成り立つ可能性がある。

$$\alpha = 1 \text{ のとき}$$

$$p_{k+1} - 6 = -(p_k - 6)$$

よって

$$p_k - 6 = (-1)^{k-1} (p_1 - 6)$$

$$= (-1)^{k-1} (4.2 - 6)$$

$$= (-1)^{k-1} (-1.8)$$

$$= (-1)^k \cdot 1.8$$

$$\text{よって } p_k = 6 + (-1)^k \cdot 1.8$$

よって

$$p_2 = 6 + 1.8 = 7.8$$

$$p_4 = 7.8$$

$$p_6 = 7.8$$

(東大後期 試行テスト 総合科目 問題 C)

図(省略)に示すような, 単位時間あたり一定量の水がタンクに流入し, タンク内にあるヒータによって暖められた後, 温水となって流出していく熱のプロセスを考える. ただし, タンク内の水は十分攪拌されており, タンク内の水温は一律であると仮定する. また, タンクは完全に断熱されており, 外部への熱の流出はないものとする. いま, 時刻 t におけるタンクに流入する水の温度とタンクから流出する温水の温度をそれぞれ $\theta_{in}(t)[^\circ\text{C}]$, $\theta_{out}(t)[^\circ\text{C}]$ とし, タンクおよびタンク内の水を併せた熱容量を $C[\text{J}/^\circ\text{C}]$ とする. また, $q_h[\text{J}/\text{sec}]$, $q_{in}(t)[\text{J}/\text{sec}]$, $q_{out}(t)[\text{J}/\text{sec}]$ を, それぞれヒータの単位時間当たりの発熱量, 流入する水がもたらす単位時間当たりの熱量, 流出する温水が持ち去る単位時間当たりの熱量とする. ただし, q_h は時間によらない. また, 上記の [] 内は, 物理量の次元を表す. このとき, 以下の問いに答えよ.

(C-1) この熱プロセスの動的な振る舞いを表す微分方程式を求める以下の手順の中で, の中を下記のリストの中の単位の組み合わせで埋めよ.

リスト: sec , J , $^\circ\text{C}$

時刻 t において流出する温水の温度 $\theta_{out}(t)$ と流入する水の温度 $\theta_{in}(t)$ の差 $\theta(t) = \theta_{out}(t) - \theta_{in}(t)$ は

$$C \frac{d\theta(t)}{dt} = q_h + q_{in}(t) - q_{out}(t)$$

と書ける. 一方, $q_{in}(t)$ と $q_{out}(t)$ はその時刻における対応する温度に比例するので

$$\theta_{out}(t) - \theta_{in}(t) = R(q_{out}(t) - q_{in}(t))$$

が成立する. ここで, R は熱抵抗と呼ばれ, (a) の次元を持つ. この2つの式を併せると, $\theta(t)$ に関する以下の関係式 (1 階の微分方程式と呼ばれる) が得られる.

$$RC \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = Rq_h \quad (5)$$

ここで, RC は (b) の次元を持つ.

(C-2) 初期時刻 $t=0$ での温度差を $\theta(0) = \theta_0$ とする. このとき

$$\theta(t) = \beta e^{\delta t} + \gamma$$

が微分方程式 (5) を満たすように定数 β , γ , δ を定めよ.

(C-3) いま, T 秒ごとに $\theta(t)$ を観測し, $x_k = \theta(kT)$ とおく. このとき, x_k と x_{k+1} の関係は

$$x_{k+1} = ax_k + b$$

の形で書ける. a と b を定めよ.

(C-4) 時間が十分経った後の流出温度と流入温度との差

$$\Theta = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

を求め, なぜそのような値となるかについて説明を与えよ.

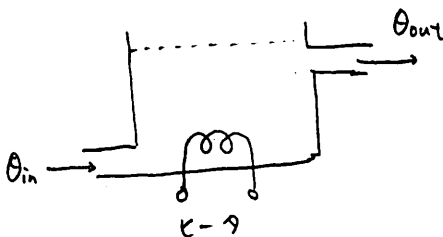


図1: 熱プロセス

(C-1). $\theta_{out}(t) - \theta_{in}(t)$ の平均値 $[^{\circ}\text{C}]$
 $\bar{\theta}_{out}(t) - \bar{\theta}_{in}(t)$ の平均値 $[\text{J}/\text{sec}]$

時間 t の平均値 $[\text{J}/\text{sec}]$ 及び
 $[\text{C} \cdot \text{sec}/\text{J}]$

RC の平均値 $[\text{J}/^{\circ}\text{C}]$ 時間 t の平均値
 $[\text{C} \cdot \text{sec}/\text{J} \cdot \text{J}/^{\circ}\text{C}]$ 及び
 $[\text{sec}]$

(C-2) $\frac{d\theta(t)}{dt} = \beta \delta e^{\delta t}$ 及び (5) に代入

すると

$$RC \cdot \beta \delta e^{\delta t} + \beta e^{\delta t} + r = Rg_h$$

$$\beta \cdot e^{\delta t} (RC\delta + 1) + (r - Rg_h) = 0$$

及び t に關する恒等式と見做すに於て

$$\beta = 0, r = Rg_h \text{ 又は } RC\delta + 1 = 0, r = Rg_h$$

よして $\theta(t) = Rg_h, \theta(t) = \beta e^{-\frac{t}{RC}} + Rg_h$

と見做すに於て 第2式に $\beta = 0$ を代入すると

第1式に於てある。第2式を考へる。

$\theta(0) = \theta_0$ 及び。代入すると

$$\theta(0) = \beta + Rg_h$$

よして

$$\beta = \theta(0) - Rg_h, r = Rg_h, \delta = -\frac{1}{RC}$$

(C-3). $\theta(t) = (\theta_0 - Rg_h) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + Rg_h$

よして $\theta_k = \theta(kT)$

$$= (\theta_0 - Rg_h) \cdot e^{-\frac{1}{RC}kT} + Rg_h$$

$$\theta_{k+1} = \theta((k+1)T)$$

$$= (\theta_0 - Rg_h) \cdot e^{-\frac{1}{RC}(k+1)T} + Rg_h$$

$$= (\theta_0 - Rg_h) \cdot e^{-\frac{1}{RC}kT} \cdot e^{-\frac{T}{RC}} + Rg_h$$

$\theta_k - Rg_h$

$$= (\theta_k - Rg_h) \cdot e^{-\frac{T}{RC}} + Rg_h$$

$$= e^{-\frac{T}{RC}} \theta_k - Rg_h \cdot e^{-\frac{T}{RC}} + Rg_h$$

よして $a = e^{-\frac{T}{RC}}, b = Rg_h \cdot (-e^{-\frac{T}{RC}} + 1)$

(C-4)

極限に於て $\theta_{k+1} \approx \theta_k$ とする。よして $a \approx 1$ とするに於て

$$a = a\alpha + b$$

$$\alpha = \frac{b}{1-a}$$
 1 に収束すると予想する。

$$\theta_{k+1} = a\theta_k + b \text{ 及び}$$

$$\theta_{k+1} - \frac{b}{1-a} = a \left(\theta_k - \frac{b}{1-a} \right)$$

よして $\theta_k - \frac{b}{1-a}$ とする

$$\theta_k - \frac{b}{1-a} = a^k \left(\theta_0 - \frac{b}{1-a} \right) \dots *$$

よして $a = e^{-\frac{T}{RC}}$ 及び $-\frac{T}{RC} < 0$ 及び

$0 < a < 1$ 及び $a^k \rightarrow 0$ 及び $k \rightarrow \infty$ とする

0 に収束する。

よして

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\theta_k - \frac{b}{1-a} \right) = 0 \text{ 及び}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k = \frac{b}{1-a} = \frac{Rg_h \cdot (-e^{-\frac{T}{RC}} + 1)}{1 - e^{-\frac{T}{RC}}}$$

$$= Rg_h$$

$R \cdot g_h$ は抵抗 R の電流

及び。この電流が与えた熱 Q のため a の温度差に於てある。

よして θ の平均値 $\theta = a$ 及び $a < 1$ とする

定常状態に於て。単純に与えた熱が温度差とある。