

(東大後期 試行テスト 総合科目 問題 A)

(A-1) n 組のデータ $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ が与えられているとし、これらのデータには

$$y_k = ax_k + b \quad (1)$$

という 1 次の関係が成り立つことが分かっているとす。ただし、 a と b は k に依らない定数とする。ここで、ある k ($k \geq 2$) に対して、それぞれ次の 3 つの状況を考える。

(i). $x_k = 2x_1, \quad y_k = 2y_1$

(ii). $ab \neq 0$ の知識のもとで $x_k > x_1, y_k < y_1$

(iii). $b < 0$ の知識のもとで $x_1 < 0, y_1 > 0, x_k > 0, y_k > 0$

これらの状況には、ある不可条件のもとで成立しうるものと、成立しえないものがある。せいりつしうるものについては、そのための必要十分条件を以下のリストから選び、理由を説明せよ。また、成立しえないものについては、そのことを証明せよ。

条件 : (ア) $a > 0$ (イ) $a = 0$ (ウ) $a < 0$ (エ) $b > 0$

(オ) $b = 0$ (カ) $b < 0$

前問の y_k が雑音 v_k によって汚され、以下の関係式で得られる z_k が観測されたとする。

$$z_k = y_k + v_k \quad (2)$$

いま、ある $c > 0$ に対して、 $|v_k| \leq c$ ($k = 1, 2$) が成立していると仮定し

$$(x_1, z_1) = (1.0, 0.5), \quad (x_2, y_2) = (-1.0, 2.0)$$

が観測されたとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(A-2) $c = 1$ とするとき、 a と b の内、符号が決定できるものを挙げ、その符号を示せ。

(A-3) この 2 つのデータだけから、 a と b の符号が一意に定まるために必要となる c の条件を求めよ。

(A-4) $a > 0$ と $b < 0$ という事前知識があったとする。このデータが観測されるために c が満たすべき条件を求めよ。