

(東大後期 試行テスト 総合科目 問題 B)

ある農作物は毎年秋に収穫され市場に出回る. k 年目($k = 1, 2, \dots$)に農産物が1単位あたりの市場価格 p_k 円で取引される場合,その年の需要は $10 - p_k$ 単位であるとする.ここで, p_k は $2 \leq p_k \leq 10$ をみたす実数である.生産者は,農産物の生産に1年を費やすため, k 年目の供給量を $k - 1$ 年目に決める.生産者は k 年目の市場価格を q_k 円と予想して,その年の供給を $q_k - 2$ 単位に決める.ここで,予想価格 q_k は $2 \leq q_k \leq 10$ をみたす実数とする.市場価格 p_k は,需要と供給を均衡させる実数値,すなわち等式

$$10 - p_k = q_k - 2 \quad (3)$$

をみたす値,に定められる.また,生産者が k 年目の市場価格を正しく予想した場合の市場価格を s とする.

以下の4つの設問においては,生産者が市場価格を正しく予想できるとは限らないことを前提とする.生産者は, k 年目の市場価格 q_k を, q_{k-1} と p_{k-1} をもとに

$$q_k = q_{k-1} + \alpha(p_{k-1} - q_{k-1}) \quad (4)$$

と予想する.ここで, α は $0 < \alpha \leq 1$ をみたす実数である.

(B-1) p_k と p_{k-1} が等式 $p_k = ap_{k-1} + b$ の関係にあることを示し, a, b を α で表せ.

(B-2) 市場価格について不等式

$$p_1 < p_2 > p_3 < p_4 > p_5 < \dots$$

が成立していたとしよう. α の取りうる範囲を求めよ.

(B-3) $\alpha \neq 1$ のとき,常に不等式

$$|p_1 - s| > |p_2 - s| > |p_3 - s| \dots$$

が成立することを証明せよ.

(B-4) 奇数年目の市場価格が常に4.2であった,すなわち

$$p_1 = 4.2, p_3 = 4.2, p_5 = 4.2, \dots$$

としよう.偶数年の市場価格 p_2, p_4, p_6 を求めよ.