

(東大後期 試行テスト 総合科目 問題 C)

図(省略)に示すような, 単位時間あたり一定量の水がタンクに流入し, タンク内にあるヒータによって暖められた後, 温水となって流出していく熱のプロセスを考える. ただし, タンク内の水は十分攪拌されており, タンク内の水温は一様であると仮定する. また, タンクは完全に断熱されており, 外部への熱の流出はないものとする. いま, 時刻 t におけるタンクに流入する水の温度とタンクから流出する温水の温度をそれぞれ $\theta_{in}(t)$ [], $\theta_{out}(t)$ [] とし, タンクおよびタンク内の水を併せた熱容量を C [J/] とする. また, q_h [J/sec], $q_{in}(t)$ [J/sec], $q_{out}(t)$ [J/sec] を, それぞれヒータの単位時間当たりの発熱量, 流入する水がもたらす単位時間当たりの熱量, 流出する温水が持ち去る単位時間当たりの熱量とする. ただし, q_h は時間によらない. また, 上記の [] 内は, 物理量の次元を表す. このとき, 以下の問いに答えよ.

(C-1) この熱プロセスの動的な振る舞いを表す微分方程式を求める以下の手順の中で, [] の中を下記のリストの中の単位の組み合わせで埋めよ.

リスト: $sec, J,$

時刻 t において流出する温水の温度 $\theta_{out}(t)$ と流入する水の温度 $\theta_{in}(t)$ の差 $\theta(t) = \theta_{out}(t) - \theta_{in}(t)$ は

$$C \frac{d\theta(t)}{dt} = q_h + q_{in}(t) - q_{out}(t)$$

と書ける. 一方, $q_{in}(t)$ と $q_{out}(t)$ はその時刻における対応する温度に比例するので

$$\theta_{out}(t) - \theta_{in}(t) = R(q_{out}(t) - q_{in}(t))$$

が成立する. ここで, R は熱抵抗と呼ばれ, [(a)] の次元を持つ. この 2 つの式を併せると, $\theta(t)$ に関する以下の関係式 (1 階の微分方程式と呼ばれる) が得られる.

$$RC \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta_t = Rq_h \quad (5)$$

ここで, RC は [(b)] の次元を持つ.

(C-2) 初期時刻 $t = 0$ での温度差を $\theta(0) = \theta_0$ とする. このとき

$$\theta(t) = \beta e^{\delta t} + \gamma$$

が微分方程式 (5) を満たすように定数 β, γ, δ を定めよ.

(C-3) いま, T 秒ごとに $\theta(t)$ を観測し, $x_k = \theta(kT)$ とおく. このとき, x_k と x_{k+1} の関係は

$$x_{k+1} = ax_k + b$$

の形で書ける. a と b を定めよ.

(C-4) 時間が十分経った後の流出温度と流入温度との差

$$\Theta = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

を求め, なぜそのような値となるかについて説明を与えよ.