

(1) 次の極限値を求めよ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (有名問題)

(2) e を自然対数の底とする. e $p < q$ のとき, 不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q - p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ.

(01 名大)

いずれの問題にしても, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ の形が見えただろうか

【解答】

(1) $f(x) = e^x$ とおく.

$$(\text{与式}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = e^0 = 1$$

(2) $f(x) = \log(\log x)$ とおく. $f(x)$ は閉区間 $[p, q]$ で連続で, 开区間 (p, q) で微分可能なので, 平均値の定理より,

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = f'(c) \quad (e \quad p < c < p)$$

となる c が存在する. $f'(x) = \frac{1}{x \log x}$ なので,

$$\frac{\log(\log q) - \log(\log p)}{q - p} = \frac{1}{c \log c}$$

また, $e < c$ より, $e \log e < c \log c$ から, $\frac{1}{e} > \frac{1}{c \log c}$.

以上より, 両辺に $q - p (> 0)$ をかけることにより,

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q - p}{e}$$

【練習】

(1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} \log \frac{x}{2}$$

(有名問題)

(2) 平均値の定理を利用して, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x}$$

【略解】

(1) $f(x) = \log x$ とおくと, $(\text{与式}) = f'(2) = \frac{1}{2}$

(2) $f(x) = \sin x$ とおくと, $f(x)$ は連続かつ微分可能なので, 平均値の定理より,

$$\frac{f(x) - f(\sin x)}{x - \sin x} = f'(c)$$

をみたく c が x と $\sin x$ の間に存在する. (x と $\sin x$ の大小はともかく) $x \rightarrow 0$ のとき, $\sin x \rightarrow 0$ より, $c \rightarrow 0$ なので, $(\text{与式}) = \lim_{c \rightarrow 0} \cos c = 1$

① $\alpha < \beta$ のとき, $|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| < \sqrt{2}(\beta - \alpha)e^\beta$ が成り立つことを示せ.

(新潟大(改))

平均値の定理と見れたらどうか.

【解答】

$f(x) = e^x \sin x$ とする. $f(x)$ は実数 x に対し, 微分可能で連続. また, $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ であるから, 平均値の定理より, $\alpha \neq \beta$ のとき, $\alpha < \gamma < \beta$ なる γ が存在し,

$$\left| \frac{e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha}{\beta - \alpha} \right| = |e^\gamma (\sin \gamma + \cos \gamma)|$$

となる. また,

$$e^\gamma (\sin \gamma + \cos \gamma) = \sqrt{2} \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{4} \right) e^\gamma$$

となり, $-\sqrt{2} < \sqrt{2} \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{4} \right) < \sqrt{2}$, $e^\alpha < e^\gamma < e^\beta$ だから,

$$|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| = \left| (\beta - \alpha) \cdot e^\gamma \cdot \sqrt{2} \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{4} \right) \right| < \sqrt{2}(\beta - \alpha)e^\beta$$

また, $\alpha = \beta$ のとき, 両辺 0 になるので成り立つ.

以上より, 示された.

② 関数 $f(x)$ は区間 $0 \leq x \leq 1$ において連続で、 $0 \leq f(x) \leq 1$ を満たす。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x$ は共有点をもつことを証明せよ。

(2) $f(x)$ が微分可能で $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ を満たすならば、

$0 \leq x_1 \leq 1$ とし、 $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

によって定義される数列 $\{x_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき収束することを証明せよ。

(九州大)

【解答】

(1) $g(x) = f(x) - x$ とする。

$$g(0) = f(0) - 0, \quad g(1) = f(1) - 1 = 0$$

である。 $g(x)$ は連続なので、中間値の定理より、 $g(x) = 0$ となる x が $0 \leq x \leq 1$ の範囲に存在する。従って、 $y = f(x)$ のグラフと $y = x$ は共有点を持つ。

(2) $g'(x) = f'(x) - 1$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ より、 $g'(x) < 0$ 。よって、 $g(x)$ は減少関数だから、 $g(x) = f(x) - x = 0$ をみたす x は $0 \leq x \leq 1$ にただ1つだけ存在する。これを $x = \alpha$ とする。

$x_n \neq \alpha$ のとき、平均値の定理より、

$$\frac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha} = f'(c_n)$$

となる c_n が、 x_n と α の間に存在する。よって、

$$f(x_n) - f(\alpha) = f'(c_n)(x_n - \alpha)$$

となる c_n が x_n と α の間に存在する。また、この式は $x_n = \alpha$ でも成り立つ。よって、

$$x_{n+1} - \alpha = f'(c_n)(x_n - \alpha)$$

$0 \leq c_n \leq 1$ より、 $|f'(c_n)| \leq \frac{1}{2}$ だから、

$$|x_{n+1} - \alpha| = |f'(c_n)| |x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha|$$

よって、

$$0 \leq |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha|$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha| = 0$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = 0$ 。よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ となり、収束する。

③ $a > b > 0$ とする。自然数 $n \geq 3$ に対して、次の不等式を証明せよ。

$$a^n - b^n > \frac{n}{2}(a-b)(a^{n-1} + b^{n-1})$$

【略解1】

一方 (例えば b) を固定し、 a を変数とみて、 x に直す。 $f(x) = (\text{右辺}) - (\text{左辺})$ で、 $x = b$ において0以上となる条件を調べる。

【略解2】

両辺を b^n で割り、 $\frac{a}{b} = x$ とおく。 $x \geq 1$ の範囲で $g(x) = (\text{右辺}) - (\text{左辺}) \geq 0$ を示す。

【略解3】

$f(x) = x^{n-1}$ ($x \geq 0$) のグラフは、下に凸な関数だから、台形の面積と $\int_b^a x^{n-1} dx$ を比較することにより、示すことが出来る。等号は $a = b$ のとき。

【練習】

$0 < a < b$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\log \frac{b}{a} < \frac{1}{2}(b-a) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

④ 次の問いに答えよ。

(1) $0 < \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ であるとき、次の不等式を示せ。

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x dx > (\beta - \alpha) \{ \sin \alpha + \sin(\pi - \beta) \}$$

(2) $\sum_{k=1}^7 \sin \frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}$ を示せ。

(京大・理)

【略解】

$y = \sin x$ のグラフは $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称だから、(左辺)

$) = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx$ である。 $y = \sin x$ のグラフの凸性を用いて、台形の面積を比較すると示せる。(2) は、 $\alpha = \frac{k\pi}{8}$, $\beta =$

$\frac{(k+1)\pi}{8}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) を代入して辺々たすと示すことが出来る。(区間毎に台形の面積比較でも OK)