

< $b - a$ の処理 >

(1) 次の極限値を求めよ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (有名問題)

(2) e を自然対数の底とする. $e^p < e^q$ のとき, 不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q - p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ.

(01 名大)

【練習】

(1) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} \log \frac{x}{2}$$

(有名問題)

(2) 平均値の定理を利用して, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x}$$

① $\alpha < \beta$ のとき, $|e^\beta \sin \beta - e^\alpha \sin \alpha| < \sqrt{2}(\beta - \alpha)e^\beta$ が成り立つことを示せ.

(新潟大(改))

② 関数 $f(x)$ は区間 $0 < x < 1$ において連続で, $0 < f(x) < 1$ を満たす. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x$ は共有点をもつことを証明せよ.

(2) $f(x)$ が微分可能で $|f'(x)| < \frac{1}{2}$ を満たすならば,

$$0 < x_1 < 1 \text{ とし, } x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

によって定義される数列 $\{x_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき収束することを証明せよ.

(九州大)

③ $a > b > 0$ とする. 自然数 $n \geq 3$ に対して, 次の不等式を証明せよ.

$$a^n - b^n < \frac{n}{2}(a - b)(a^{n-1} + b^{n-1})$$

【練習】

$0 < a < b$ のとき、次の不等式を証明せよ.

$$\log \frac{b}{a} < \frac{1}{2}(b-a) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

④ 次の問いに答えよ.

(1) $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ であるとき、次の不等式を示せ.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x dx > (\beta - \alpha) \{ \sin \alpha + \sin(\pi - \beta) \}$$

(2) $\sum_{k=1}^7 \sin \frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}$ を示せ.

(京大・理)