

## バームクーヘン分割

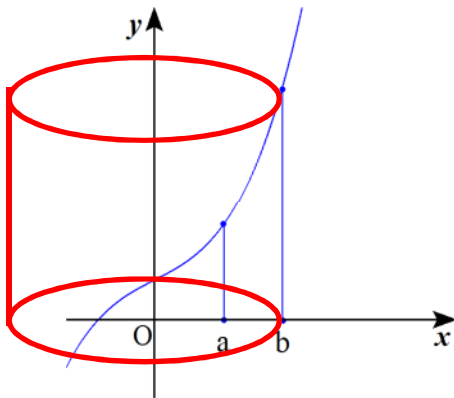
### 【例題】

単調増加する連続関数  $y = f(x)$  は、区間  $[a, b]$  において、 $f(x) \geq 0$  を満たすとする。

$y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸、 $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた図形を  $y$  軸の周りに **1** 回転させたときにできる回転体の体積を  $V$  は、

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

で表せることを部分積分を用いて示せ。



求める体積は、 $x = b$  を回転した円柱から、 $x = a$  を回転した円柱と  $y = f(x)$  (ただし、 $[a, b]$ ),  $y = f(a), y = f(b)$  を回転した体積を引けばよい。したがって、

$$V = \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy$$

ここで、 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  より、

$$\int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy = \int_a^b x^2 f'(x) dx$$

$$= [f(x)x^2]_a^b - \int_a^b f(x)2x dx$$

$$= b^2 f(b) - a^2 f(a) - 2 \int_a^b xf(x) dx$$

となる。これを最初の式に代入すると、

$$V = \dots = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

※一般的には、単調増加でなくても、

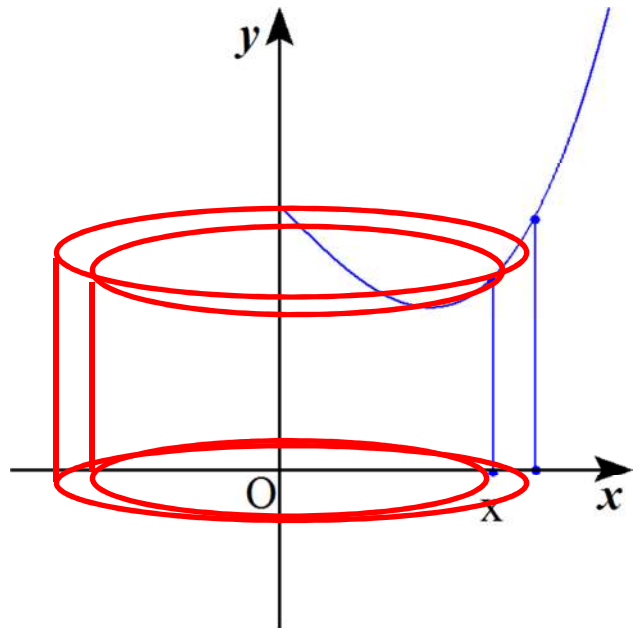
$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

が成り立つ。また、図形的には次のような解釈ができる。区間  $[a, b]$  を幅  $\Delta x$  になるように  $n$  等分し、 $x$  座標を順に  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  とする。

$x$  軸上の点  $x_k$  から幅  $\Delta x$  をとり、図のように回転体を作る。この円筒の体積は、「円周  $\times$  高さ  $\times$  厚み」つまり、

$2\pi x_k f(x_k) \Delta x$  に近似できる。これをかき集めて、 $\Delta x \rightarrow 0$  とすれば、求める立体の体積になる。すなわち、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi x_k f(x_k) \Delta x = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$



**【1】**  $y = \sin x$  のグラフの  $0 \leq x \leq \pi$  を満たす部分と  $x$  軸に囲まれた部分を  $y$  軸の周りに **1** 回転させたときにできる回転体の体積を  $V$  を求めよ。

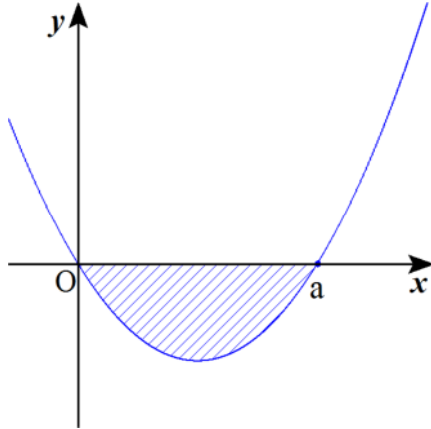
### 【解答】

区間  $[a, b]$  を幅  $\Delta x$  になるように  $n$  等分し、 $x$  座標を順に  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  とする。このとき  $V$  は、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi x_k \sin x_k \Delta x = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = \dots = 2\pi^2$$

【2】 曲線  $y = x^2 - ax$  ( $a > 0$ ) と  $x$  軸とで囲まれた図形を、 $x$  軸のまわりに **1** 回転してできる立体の体積を  $V_1$ 、 $y$  軸のまわりに **1** 回転してできる立体の体積を  $V_2$  とする。このとき、 $V_1 = V_2$  となるように定数  $a$  の値を求めよ。

(信州大・工)



【解答】

$$V_1 = \pi \int_0^a (x^2 - ax)^2 dx$$

$$= \dots = \frac{1}{30} \pi a^5$$

区間  $[0, a]$  を幅  $\Delta x$  になるように  $n$  等分し、 $x$  座標を順に  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  とする。このとき  $V_2$  は、

$$V_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi x_k \{-x_k^2 + ax_k\} \Delta x$$

$$= 2\pi \int_0^a x(-x^2 + ax) dx$$

$$= \dots = \frac{1}{6} \pi a^4$$

$$V_1 = V_2 \text{ より, } a = 5.$$