

ベータ関数

【例題】 $n \geq 1$ m, n は0または正の整数とする. 定積分

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}$ であることを示せ.

(2) $I_{m,n}$ を求めよ.

(名古屋市立大・薬)

右辺の漸化式をよく見ると, x^m の指数は増え, $(1-x)^n$ の指数は減っている. 一方, 部分積分の公式を考えると,

$$\int_a^b fg dx = [Fg]_a^b - \int_a^b Fg' dx$$

よって, $[Fg]_a^b$ は定数になり, $-\int_a^b Fg' dx$ においては, f は積分され, g は微分されているので, 部分積分をすとうまくいくのではないかとこの予想ができる.

【解答】

$$\begin{aligned} (1) I_{m,n} &= \left[\frac{1}{m+1} x^{m+1} (1-x)^n \right]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 \frac{1}{m+1} x^{m+1} (-n)(1-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を繰り返し使うと,

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1} \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} I_{m+2,n-2} \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \frac{n-2}{m+3} I_{m+3,n-3} \\ &= \dots \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \frac{n-2}{m+3} \dots \frac{1}{m+n} I_{m+n,0} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} I_{m+n,0} &= \int_0^1 x^{m+n} dx \\ &= \frac{1}{m+n+1} \end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)(m+n+1)} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \end{aligned}$$

【解説】

大学では, p, q の関数 $B(p, q)$ を,

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

と定義し, ベータ関数という. 三角関数で置換して新しい公式を導いたり, ガンマ関数との関係式があったりと, 様々な特徴がある関数であるが, とりあえずは部分積分で漸化式を確実に解くことを目標にしよう.

【1】 m, n は0または正の整数とする. $I(m, n)$ を

$$I(m, n) = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx$$

とする. ただし, $\alpha < \beta$ とする.

(1) $I(m, 0)$ を求めよ.

(2) $n \geq 1$ のとき, $I(m, n)$ を $I(m+1, n-1)$ を用いて表せ.

(3) $I_{m,n}$ を求めよ.

(高知大)

【解答】

$$(1) I(m, 0) = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m dx = \frac{(\beta-\alpha)^{m+1}}{m+1}$$

$$\begin{aligned} (2) I(m, n) &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta-x)^n dx \\ &= \left[\frac{(x-\alpha)^{m+1}}{m+1} (\beta-x)^n \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &\quad + \frac{n}{m+1} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^{m+1} (\beta-x)^{n-1} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$$

(3) (2)の結果を繰り返し使うと,

$$\begin{aligned} I(m, n) &= \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1) \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} I(m+2, n-2) \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdot \frac{n-2}{m+3} \cdots \frac{1}{m+n} \cdot I(m+n, 0) \end{aligned}$$

(1) より,

$$I(m+n, 0) = \frac{(\beta - \alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}$$

が成り立つので,

$$I(m, n) = \frac{m! n!}{(m+n+1)!} \cdot (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

【解説】

$m=1, n=1$ とすると,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(\beta-x) dx &= I(1, 1) \\ &= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

となり, 有名な6分の1公式になる. 同様に,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(\beta-x)^2 dx &= I(1, 2) \\ &= \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^4 \end{aligned}$$

となり, 有名な12分の1公式になる.

また, $x=\alpha$ のとき $t=0$, $x=\beta$ のとき $t=1$ となるように, $t = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$ と置換すると, 【例題】と【1】をつなぐこともできる.

【2】 m, n を自然数とする. 第一象限内の曲線 $\frac{1}{x^m} + \frac{1}{y^n} = 1$ と x 軸, y 軸とで囲まれる部分の面積を $A(m, n)$ とする.

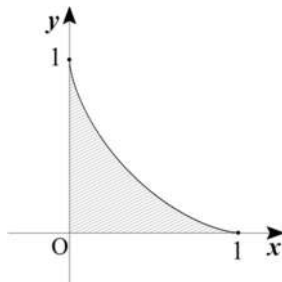
(1) $A(m, 1)$ を求めよ.

(2) $A(m, n+1) = \frac{n+1}{m+1} A(m+1, n)$ であることを示せ.

(3) $A(m, n)$ を求めよ.

(東京工業大)

特に, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で表される図形をアステロイド(右図)という. 類題として練習しておこう.



【解答】

$$\begin{aligned} (1) A(m, 1) &= \int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{m}}) dx \\ &= \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

$$(2) A(m, n+1) = \int_0^1 (1 - x^{\frac{1}{m}})^{n+1} dx$$

ここで, $t = x^{\frac{1}{m}}$ として, 置換すると,

$$A(m, n+1) = \int_0^1 (1-t)^{n+1} m t^{m-1} dt$$

$t = x^{\frac{1}{m+1}}$ として, 同様に計算すると,

$$A(m+1, n) = \int_0^1 (1-t)^n (m+1) t^m dt$$

以上より,

$$\begin{aligned} A(m, n+1) - \frac{n+1}{m+1} A(m+1, n) &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} m t^{m-1} dt \\ &\quad - \frac{n+1}{m+1} \int_0^1 (1-t)^n (m+1) t^m dt \\ &= \int_0^1 \{ (1-t)^{n+1} m t^{m-1} - (n+1)(1-t)^n t^m \} dt \\ &= [(1-t)^{n+1} t^m]_0^1 \\ &= 0 \text{ より示された.} \end{aligned}$$

※下から2行目に気付くかどうか分かれ目. 積の微分の逆の変形を使っている.

(3) $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} A(m, n) &= \frac{n}{m+1} A(m+1, n-1) \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} A(m+2, n-2) \\ &= \cdots \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdots \frac{2}{m+n-1} A(m+n-1, 1) \\ &= \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdots \frac{2}{m+n-1} \cdot \frac{1}{m+n} \\ &= \frac{m! n!}{(m+n)!} \end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ.