

ベータ関数

【例題】 $n \geq 1$ m, n は0または正の整数とする. 定積分

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}$ であることを示せ.

(2) $I_{m,n}$ を求めよ.

(名古屋市立大・薬)

【1】 m, n は0または正の整数とする. $I(m, n)$ を

$$I(m, n) = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx$$

とする. ただし, $\alpha < \beta$ とする.

(1) $I(m, 0)$ を求めよ.

(2) $n \geq 1$ のとき, $I(m, n)$ を $I(m+1, n-1)$ を用いて表せ.

(3) $I_{m,n}$ を求めよ.

(高知大)

【2】 m, n を自然数とする. 第一象限内の曲線 $x^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{n}} = 1$ と x 軸, y 軸とで囲まれる部分の面積を $A(m, n)$ とする.

(1) $A(m, 1)$ を求めよ.

(2) $A(m, n+1) = \frac{n+1}{m+1} A(m+1, n)$ であることを示せ.

(3) $A(m, n)$ を求めよ.

(東京工業大)