

## 合格の必要条件とは（文）

$f(\theta) = \cos 4\theta - 4 \sin^2 \theta$  とする.  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  における  $f(\theta)$  の最大値および最小値を求めよ.

(2004 京都大・文)

(1)  $0 < x < 2\pi$  の範囲で  $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$  を満たす  $x$  の個数を求めよ.

(2)  $0 < x < 2\pi$  の範囲で  $\cos(\pi \cos x) = \cos x$  を満たす  $x$  の個数を求めよ.

(2010 東北大)

$c > 1$  を定数とする.  $xy$  平面で, 点  $(1, c)$  を通る直線  $l$  と放物線  $y = x^2$  で囲まれる図形の面積を最小にする  $l$  の傾きを求めよ. またその最小面積を求めよ.

(1992 東工大)

数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n$$

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + 2a_n$$

$$c_1 = 4, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + b_n$$

と順に定める. 放物線  $y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$  を  $H_n$  とする.

(1)  $H_n$  は  $x$  軸と 2 点で交わることを示せ.

(2)  $H_n$  と  $x$  軸の交点を  $P_n, Q_n$  とする.  $\sum_{k=1}^n P_k Q_k$  を求めよ.

(2007 一橋大)

方程式  $48x + 539y = 77$  を満たす整数解  $x, y$  をすべて求めよ.

(1996 大阪市立大)

三角形 ABC において,  $\angle B = 60^\circ$ , B の対辺の長さ  $b$  は整数, 他の 2 辺の長さ  $a, c$  はいずれも素数である. このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ.

(1990 京都大・文理)

数列  $\{a_n\}$  の初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和を  $S_n$  と表す. この数列が

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad (n-1)^2 a_n = S_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, 一般項  $a_n$  を求めよ.

(2002 京都大・文)

$a_n = [\log_2 n] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$  とするとき,  $\sum_{k=1}^{2^m-1} a_k$  を求めよ.

ただし,  $m$  は自然数とし,  $[\log_2 n]$  は  $\log_2 n$  を超えない最大の整数を表すものとする.

(1986 宮崎大)

正四面体の各頂点を  $A_1, A_2, A_3, A_4$  とする. ある頂点にいる動点  $X$  は, 同じ頂点にとどまることなく, 1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する.  $X$  が  $A_i$  に  $n$  秒後に存在する確率を  $P_i(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$  で表す.

$$P_1(0) = \frac{1}{4}, \quad P_2(0) = \frac{1}{2}, \quad P_3(0) = \frac{1}{8}, \quad P_4(0) = \frac{1}{8}$$

とするとき,  $P_1(n)$  と  $P_2(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$  を求めよ.

(2000 東大・文)

1 から  $n$  までの数字を 1 つずつ書いた  $n$  枚のカードがある. ただし,  $n \geq 2$  とする.

(1) この  $n$  枚のカードから 1 度に 2 枚選び, 大きい方の数字を  $X$  とする.  $X$  の期待値  $E_1$  を求めよ.

(2) この  $n$  枚のカードから 1 枚を選び, その数字を  $X_1$  とする. そのカードをもとに戻し, 改めて 1 枚選び, その数字を  $X_2$  とする.  $X_1$  と  $X_2$  の小さくない方の数字を  $Y$  とする.  $Y$  の期待値  $E_2$  を求めよ.

(2001 一橋大)

(1) 素数の定義を述べよ.

(2) 素数は無数に存在することを証明せよ.

(オリジナル (有名問題))

$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$  を証明せよ. ここに  $n$  は 2 以上の整数とする.

(1970 京都大・理文 (改))