

合格の必要条件とは(文)

$f(\theta) = \cos 4\theta - 4 \sin^2 \theta$ とする. $0^\circ < \theta < 90^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ.

(2004 京都大・文)

(1) $0 < x < 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$ を満たす x の個数を求めよ.

(2) $0 < x < 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \cos x$ を満たす x の個数を求めよ.

(2010 東北大)

$c > 1$ を定数とする. xy 平面で, 点 $(1, c)$ を通る直線 l と放物線 $y = x^2$ で囲まれる図形の面積を最小にする l の傾きを求めよ. またその最小面積を求めよ.

(1992 東工大)

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n$$

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + 2a_n$$

$$c_1 = 4, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + b_n$$

と順に定める. 放物線 $y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$ を H_n とする.

(1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ.

(2) H_n と x 軸の交点を P_n, Q_n とする. $\sum_{k=1}^n P_k Q_k$ を求めよ.

(2007 一橋大)

方程式 $48x + 539y = 77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.

(1996 大阪市立大)

三角形 ABC において, $\angle B = 60^\circ$, B の対辺の長さ b は整数, 他の 2 辺の長さ a, c はいずれも素数である. このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ.

(1990 京都大・文理)

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す. この数列が

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad (n-1)^2 a_n = S_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ.

(2002 京都大・文)

$a_n = [\log_2 n] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ とするとき, $\sum_{k=1}^{2^m-1} a_k$ を求めよ.

ただし, m は自然数とし, $[\log_2 n]$ は $\log_2 n$ を超えない最大の整数を表すものとする.

(1986 宮崎大)

正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする. ある頂点にいる動点 X は, 同じ頂点にとどまることなく, 1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する. X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ で表す.

$$P_1(0) = \frac{1}{4}, \quad P_2(0) = \frac{1}{2}, \quad P_3(0) = \frac{1}{8}, \quad P_4(0) = \frac{1}{8}$$

とするとき, $P_1(n)$ と $P_2(n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ を求めよ.

(2000 東大・文)

1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある. ただし, $n \geq 2$ とする.

(1) この n 枚のカードから 1 度に 2 枚選び, 大きい方の数字を X とする. X の期待値 E_1 を求めよ.

(2) この n 枚のカードから 1 枚を選び, その数字を X_1 とする. そのカードをもとに戻し, 改めて 1 枚選び, その数字を X_2 とする. X_1 と X_2 の小さくない方の数字を Y とする. Y の期待値 E_2 を求めよ.

(2001 一橋大)

(1) 素数の定義を述べよ.

(2) 素数は無数に存在することを証明せよ.

(オリジナル (有名問題))

$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ. ここに n は 2 以上の整数とする.

(1970 京都大・理文 (改))