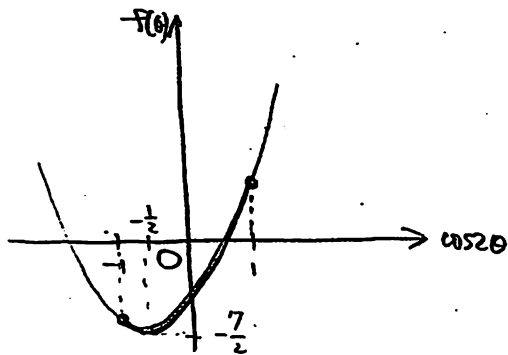


$f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2 \theta$ とする. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ

(2004 京都大・文)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 4\theta - 4\sin^2 \theta \\ &= 2\cos^2 2\theta - 1 - 4 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= 2\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta - 3 \\ &= 2\left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より
 $0^\circ \leq 2\theta \leq 180^\circ$. よって $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$



よって $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$ かつ $\theta = 60^\circ$
のとき 最小値 $-\frac{7}{2}$.
 $\cos 2\theta = 1$. かつ $\theta = 0^\circ$ のとき
最大値 1 .

※ 絶対に落としてはいけない!!

(1) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$ を満たす x の個数を求めよ.

(2) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \cos x$ を満たす x の個数を求めよ.

(2010 東北大)

(1) $\pi \cos x = t$ とおくと.

$$0 \leq x \leq 2\pi \text{ より}$$

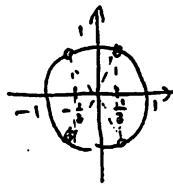
$$-\pi \leq t \leq \pi$$

$$\cos t = \frac{1}{2} \text{ より } t = \pm \frac{\pi}{3}$$

すなわち.

$$\cos x = \pm \frac{1}{3}$$

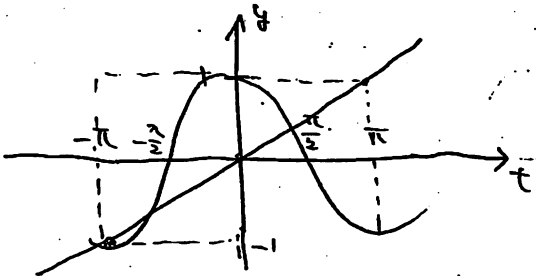
より. x は 4 個.



(2) (1) と同様にとおくと.

$$\cos t = \frac{1}{\pi} t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$$

$$y = \cos t, \quad y = \frac{1}{\pi} t \text{ のグラフを}$$



$(-\pi, 1)$ のほか 2 点で交わる.

この 2 点は $-\pi < t < \pi$ の範囲に

あり. t が 1 つ決まると x は 2 つ決まる.

よって.

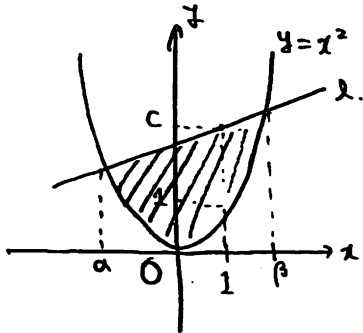
5 個

$c > 1$ を定数とする xy 平面で、点 $(1, c)$ を通る直線 l と放物線 $y = x^2$ で囲まれる図形の面積を最小にする l の傾きを求めよ。またその最小面積を求めよ。

(1992 東工大)

l は

$$y = m(x-1) + c \quad (c > 1)$$



$y = x^2$ と l の交点の x 座標を

α, β ($\alpha < \beta$) とする。

囲まれた部分の面積 S は

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{m(x-1) + c - x^2\} dx$$

$$= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3$$

$\therefore \alpha, \beta$ は

$$m(x-1) + c - x^2 = 0 \text{ の解 } \alpha, \beta$$

$$x^2 - mx + m - c = 0$$

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4m + 4c}}{2}$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m + 4c}}{2} - \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m + 4c}}{2}$$

$$= \sqrt{m^2 - 4m + 4c}$$

$\therefore S$ は

$$S = \frac{1}{6} (m^2 - 4m + 4c)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6} \{(m-2)^2 - 4 + 4c\}^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore (m-2)^2 \geq 0 \text{ より } m = 2 \text{ とき}$$

$$\frac{4}{3} (c-1)^{\frac{3}{2}}$$

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 4a_n$$

$$b_1 = 3, \quad b_{n+1} = b_n + 2a_n$$

$$c_1 = 4, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{4} + a_n + b_n$$

と順に定める。放物線 $y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$ を H_n とする。

(1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ。

(2) H_n と x 軸の交点を P_n, Q_n とする。 $\sum_{k=1}^n P_k Q_k$ を求めよ。

(2007 一橋大)

(1) $\frac{D_n}{4} = b_n^2 - a_n c_n$ とおく。

$$\begin{aligned} \frac{D_{n+1}}{4} &= b_{n+1}^2 - a_{n+1} c_{n+1} \\ &= (b_n + 2a_n)^2 - 4a_n \left(\frac{c_n}{4} + a_n + b_n \right) \\ &= b_n^2 + 4a_n b_n + 4a_n^2 \\ &\quad - a_n c_n - 4a_n^2 - 4a_n b_n \\ &= b_n^2 - a_n c_n \end{aligned}$$

∴ $\frac{D_n}{4} = \frac{D_{n+1}}{4} = \dots = \frac{D_1}{4}$

∴ $\frac{D_1}{4} = 9 - 8 = 1$ ∴

$\frac{D_n}{4}$ の値は n に依らず常に 1 である。

∴ $\frac{D_n}{4} > 0$ である。(判別式) > 0 となり、 H_n は x 軸と常に 2 点で交わる。

(2) $a_n x^2 + 2b_n x + c_n = 0$ とおくと

$a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$ ∴ a_n は 0 に依らず

∴ $x = \frac{-b_n \pm \sqrt{\frac{D_n}{4}}}{a_n}$

$$\begin{aligned} \text{∴ } P_n Q_n &= \frac{-b + \sqrt{\frac{D_n}{4}}}{a_n} \cdot \frac{-b - \sqrt{\frac{D_n}{4}}}{a_n} \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{D_n}{4}}}{a_n} \end{aligned}$$

∴ $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$, $\frac{D_n}{4} = 1$ であるから

$$P_n Q_n = \frac{1}{4^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{∴ } \sum_{k=1}^n P_k Q_k &= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

方程式 $48x + 539y = 77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.

(1996 大阪市立大)

$$539 = 77 \cdot 7 + 7$$

$$48x = 77(1-7y)$$

48 と 77 は互いに素だから、

m を整数とすると、

$$x = 77m \dots \textcircled{1}$$

とわかる。

$$48 \cdot 77m = 77(1-7y)$$

$$48m = 1 - 7y$$

$y = 7, m = -1$ はこれを満たす。

$$7y + 48m = 1$$

$$- \quad 7 \cdot 7 + 48 \cdot (-1) = 1$$

$$7 \cdot (y-7) + 48 \cdot (m+1) = 0$$

$$7 \cdot (y-7) = -48 \cdot (m+1)$$

7 と 48 は互いに素だから、 n を整数とすると

$$m+1 = 7n \dots \textcircled{2}$$

とわかる。

$$7 \cdot (y-7) = -48 \cdot 7n$$

$$y = -48n + 7$$

① ②より

$$x = 77m$$

$$= 77(7n-1)$$

$$= 539n - 77$$

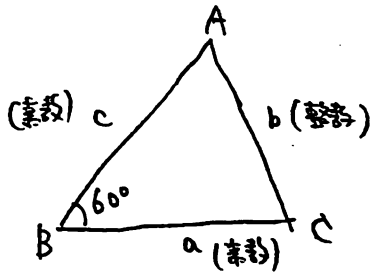
よって

$$(x, y) = (539n - 77, -48n + 7)$$

(n は整数)

三角形 ABC において、 $\angle B = 60^\circ$ 、B の対辺の長さ b は整数、他の 2 辺の長さ a, c はいずれも素数である。このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

(1990 京都大・文理)



余弦定理より

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{1}{2}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac$$

$$b^2 = (a-c)^2 + ac$$

$$b^2 - (a-c)^2 = ac$$

$$(b+a-c)(b-a+c) = ac$$

$a \geq c$ とし一般性を失わずに

$a \geq c$ とする。

$$b+a-c \geq b-a+c$$

また、 a, b, c は三角形の辺だから

$$b+c > a$$

$$b+a-c \geq b-a+c > 0$$

よって

$$b+a-c = a, \quad b-a+c = c \quad \dots \textcircled{1}$$

また

$$b+a-c = ac, \quad b-a+c = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

とすると

① $a \geq c$ のとき、 $a = b = c$ より正三角形。

② $a < c$ のとき、第 2 式より $b = a - c + 1$ 。

第 1 式に代入して

$$a - c + 1 + a - c = ac$$

$$2a - 2c + 1 = ac$$

$$(a+2)(c-2) = -3$$

a, c は自然数だから

$$a = c = 1$$

であるが、 a, c は素数であることに反する。

よって

$a = b = c$ より正三角形のみ

成立する。

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。この数列が
 $a_1 = 0, a_2 = 1, (n-1)^2 a_n = S_n \quad (n \geq 1)$
 を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

(2002 京都大・文)

$$(n-1)^2 a_n = S_n$$

よって

$$n^2 a_{n+1} = S_{n+1}$$

よって

$$n^2 a_{n+1} = S_{n+1}$$

$$- \quad (n-1)^2 a_n = S_n$$

$$n^2 a_{n+1} - (n-1)^2 a_n = a_{n+1}$$

$$(n^2 - 1) a_{n+1} = (n-1)^2 a_n$$

$n \neq 1, a \geq 2$

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1} a_n$$

したがって

$$a_n = \frac{n-2}{n} a_{n-1}$$

$$= \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots$$

$$= \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot a_2$$

$$= \frac{2a_2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)}$$

よって

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1, a \geq 2) \\ \frac{2}{n(n-1)} & (n \geq 2, a \geq 2) \end{cases}$$

* 理由です。

$$a_1 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geq 1)$$

で出題してあります。

$a_n = [\log_2 n]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, $\sum_{k=1}^{2^m-1} a_k$ を求めよ.
 ただし, m は自然数とし, $[\log_2 n]$ は $\log_2 n$ を超えない最大の整数を表すものとする.
 (1986 宮崎大)

$$\begin{aligned}
 \log_2 1 &= 0 \\
 \log_2 2 &= 1 \\
 \log_2 3 &= 1 \\
 \log_2 4 &= 2 \\
 \log_2 5 &= 2 \\
 \log_2 6 &= 2 \\
 \log_2 7 &= 2 \\
 \log_2 8 &= 3
 \end{aligned}$$

冷静に $0 < n < 2^{i+1}$ のとき $\log_2 2^i$ とおいたときに
 は $[\log_2 x] = i$ である。(だから,
 $2^i \leq x < 2^{i+1}$
 かつ $[\log_2 x] = i$ である。

$a_n = [\log_2 n]$ より,

$$\begin{aligned}
 &[\log_2 1] = 0 \\
 &[\log_2 2] = 1 \\
 &[\log_2 3] = 1 \\
 &[\log_2 4] = 2 \\
 &[\log_2 5] = 2 \\
 &[\log_2 6] = 2 \\
 &[\log_2 7] = 2 \\
 &[\log_2 8] = 3 \\
 &\vdots \\
 &[\log_2 2^i] = i \quad \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} i \text{ 個} \cdot 2^i \text{ 個} \\
 &[\log_2 2^{i+1}] = i+1 \\
 &\vdots \\
 &[\log_2 2^{m-1}] = m-1 \\
 &\vdots \\
 &[\log_2 2^m - 1] = m-1 \quad \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} (m-1) \text{ 個} \cdot 2^{m-1} \text{ 個}
 \end{aligned}$$

よって求める和を N とすると

$$\begin{aligned}
 N &= 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + (m-1) \times 2^{m-1} \\
 -N &= \quad \quad 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + (m-1) \times 2^m \\
 \hline
 -N &= 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{m-1} - (m-1) \cdot 2^m \\
 -N &= \frac{2(1-2^{m-1})}{1-2} - (m-1) \cdot 2^m \\
 N &= 2 - 2^m + (m-1) \cdot 2^m \\
 &= 2 + (m-2) \cdot 2^m
 \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{2^m-1} 2 + (m-1) \cdot 2^m$

正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は、同じ頂点にとどまることなく、1秒ごとに他の3つの頂点に同じ確率で移動する。 X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で表す。

$$P_1(0) = \frac{1}{4}, \quad P_2(0) = \frac{1}{2}, \quad P_3(0) = \frac{1}{8}, \quad P_4(0) = \frac{1}{8}$$

とするとき、 $P_1(n)$ と $P_2(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。

(2000 東大・文)

X が $n+1$ 秒後に A_i にいるとすれば、
 n 秒後に他の3点にいて、そこから $\frac{1}{3}$ の
 確率で移動するから

$$P_i(n+1) = \frac{1}{3}(1 - P_i(n))$$

よって

$$P_i(n+1) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(P_i(n) - \frac{1}{4} \right)$$

よって $P_i(n) - \frac{1}{4}$ は初項 $P_i(0) - \frac{1}{4}$ 、

公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列だから

$$P_i(n) - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(P_i(0) - \frac{1}{4}\right)$$

$$P_i(n) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(P_i(0) - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

よって $P_1(n) = \frac{1}{4}$

$$P_2(n) = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

1から n までの数字を1つずつ書いた n 枚のカードがある。ただし、 $n \geq 2$ とする。

(1) この n 枚のカードから1度に2枚選び、大きい方の数字を X とする。 X の期待値 E_1 を求めよ。

(2) この n 枚のカードから1枚を選び、その数字を X_1 とする。そのカードをもとに戻し、改めて1枚選び、その数字を X_2 とする。 X_1 と X_2 の小さくない方の数字を Y とする。 Y の期待値 E_2 を求めよ。

(2001一橋大)

(1) n 枚のカードから2枚選ぶ場合の数は、 nC_2 通り。



よて、求める確率は

$$\frac{1 \cdot k C_2}{nC_2} = \frac{2(k-1)}{n \cdot (n-1)}$$

ただし、 $1 < k \leq n$ とする。

よて、求める期待値 E_1 は

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{k=2}^n k \cdot \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{6} n(n+1) \{ (2n+1) - 3 \} \\ &= \frac{2}{3} (n+1) \end{aligned}$$

(2) $1 < k \leq n$ とする。

$Y = X_1 \neq X_2$ で、 $X_1 = k$ となる確率は

$X_1 = k$ 、 $X_2 \leq k-1$ となる。

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{k-1}{n}$$

$Y = X_2 \neq X_1$ で、 $X_2 = k$ となる確率は同様に求む。

$$\frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$Y = X_1 = X_2 = k$ となる確率は

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \quad (k=1 \text{ の場合は } 0 \text{ とは含まない})$$

よて、 $Y = k$ となる確率は

$$2 \cdot \frac{k-1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2(k-1)}{n^2}$$

$$E_2 = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{2(k-1)}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k^2 - k)$$

$$= \frac{1}{n^2} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2} n(n+1) \right\}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{6} \{ 2(2n+1) - 3 \}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{6} (4n-1)$$

$$= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$$

(1) 素数の定義を述べよ.

(2) 素数は無数に存在することを証明せよ.

(オリジナル (有名問題))

(1) 1と自身以外に正の約数をもたない、
1以上の自然数

注) 1を自然数にゆくと、素因数分解の一意性が成立しない。

(2) 背理法を用いる。

素数が有限個 (n 個と仮) しかないと仮定する。

これを順に p_1, p_2, \dots, p_n ($p_1 < p_2 < \dots < p_n$) とし、

次のような数を考える。

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

q が素数でないとき、 p_n より大きい素数があることになり矛盾する。

q が素数でないとき、 q は素因数をもつが、 p_n 以下のどの素数でも q を1余る。どの素数でも割り切れない。よって、 q は p_n より大きい素数で割り切れることになり、仮定に矛盾する。

以上より、素数は無限に存在する。

参考

2: 最小の素数

2+1=3 ← 素数

2·3+1=7 ← 素数

2·3·7+1=43 ← 素数

2·3·7·43+1=1807 = 13·139

↑
合成数

↑ ↑
素数だが、合計に
あつたもの。

③ q が素数とは限らないことに注意する。

$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ。ここに n は 2 以上の整数とする。

(1970 京都大・理文(改))

数学的帰納法で証明する。

i) $n=2$ のとき。

(左) $= \frac{9}{4}$, (右) $= 2$ より成り立つ。

ii) $n=k$ のとき。

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^k > k!$$

が成り立つと仮定する。このとき。

$$\begin{aligned} \left(\frac{(k+1)+1}{2}\right)^{k+1} &= \left(\frac{k+1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} + {}_{k+1}C_1 \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad + {}_{k+1}C_2 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k-2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &> \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} + {}_{k+1}C_1 \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、仮定より。

$$\begin{aligned} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} &\geq \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot \frac{k+1}{2} \\ &> k! \cdot \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} {}_{k+1}C_1 \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \\ = (k+1) \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} \dots * \end{aligned}$$

よって、 $\left(\frac{k+1}{2}\right)^k > k!$ より

$${}_{k+1}C_1 \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{2} > k! \cdot \frac{k+1}{2}$$

$$\begin{aligned} * &> (k+1) \cdot 1 \cdot k! \cdot \frac{1}{2} \\ &= k! \cdot \frac{k+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} \left(\frac{(k+1)+1}{2}\right)^{k+1} &> k! \cdot \frac{k+1}{2} + k! \cdot \frac{k+1}{2} \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ でも成り立つ

よって数学的帰納法より示された。