

幾何の最終攻略

各回最後の問題は追加演習です。基本的には授業内で演習時間を確保します。

【第1回 平面】

点 $P(x, y)$ は xy 平面上の円

$$C : (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

の上を動く動点である。このとき点 P の点 $A(9, 0)$ に関する対称点を Q とし、また点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を R とする。点 P が円 C 上の点を動くときの線分 QR の長さの最小値 $f(r)$ と最大値 $g(r)$ とを求めよ。また $f(r)$ が 0 となるような r の値を求めよ。

(1976 東大 2 次・文理)

点 O を中心とする円に内接する $\triangle ABC$ の 3 辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:3$ に内分する点を P, Q, R とする。 $\triangle PQR$ の外心が点 O と一致するとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

(2007 京都大・理)

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P をとり、円の内部または周上に 2 点 Q, R を、 $\triangle PQR$ が 1 辺の長さ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形になるようにとる。このとき、 $OQ^2 + OR^2$ の最大値および最小値を求めよ。

(1979 東大・理)

【第2回 空間】

空間に座標系が定められていて、 z 軸上に 2 点 $A(0, 0, 6), B(0, 0, 20)$ が与えられている。 xy 平面上の点 $P(x, y, 0)$ で、 $0 \leq x \leq 15, 0 \leq y \leq 15, \angle APB = 30^\circ$ を満たすもの全体がつくる図形の面積を求めよ。

(1972 東大 2 次・文理)

次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の 3 点 $O(0, 0), A(2, 1), B(1, 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) t が実数全体を動くとき、 xyz 空間内の点 $(t + 2, t + 2, t)$ がつくる直線を l とする。3 点 $O(0, 0, 0), A'(2, 1, 0), B'(1, 2, 0)$ を通り、中心を $C(a, b, c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき、 a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2011 北海道大・理)

xyz 空間内の点 $P(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 K がある。 K 上の点 $Q(a, b, c)$ が条件 $a > 0, b > 0, c > 1$ のもとで K 上を動くとき、 Q において K に接する平面を L とし、 L が x 軸、 y 軸、 z 軸と交わる点をそれぞれ、 A, B, C とする。このような三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

(1987 東大・理)