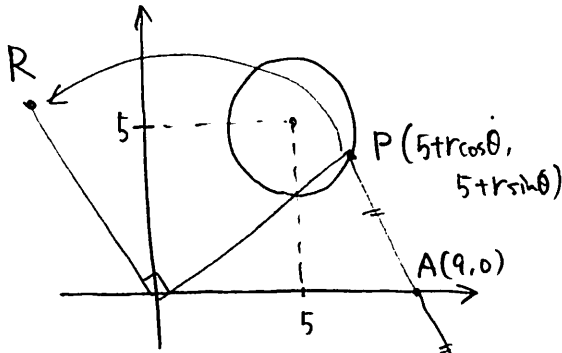


点 $P(x, y)$ は xy 平面上の円

$$C: (x-5)^2 + (y-5)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

の上を動く動点である。このとき点 P の点 $A(9, 0)$ に関する対称点を Q とし、また点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を R とする。点 P が円 C 上の点を動くときの線分 QR の長さの最小値 $f(r)$ と最大値 $g(r)$ とを求めよ。また $f(r)$ が 0 となるような r の値を求めよ。

(1976 東大2次・文理)



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (5, 5) + (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= (5 + r \cos \theta, 5 + r \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\vec{PA} = (4 - r \cos \theta, -5 - r \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OP} + 2\vec{PA} \\ &= (13 - r \cos \theta, -5 - r \sin \theta) \end{aligned}$$

また、 \vec{OR} は \vec{OP} を $\frac{\pi}{2}$ 回転したベクトルだから、 $\vec{OR} = (-5 - r \sin \theta, 5 + r \cos \theta)$

よって

$$\begin{aligned} \vec{QR} &= \vec{OR} - \vec{OQ} \\ &= (-18 - r \sin \theta + r \cos \theta, 10 + r \sin \theta + r \cos \theta) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} |\vec{QR}|^2 &= 324 + r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \\ &\quad + 36r \sin \theta - 2r^2 \sin \theta \cos \theta - 36r \cos \theta \\ &\quad + 100 + r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \\ &\quad + 20r \sin \theta + 2r^2 \sin \theta \cos \theta + 20r \cos \theta \\ &= 2r^2 + 56r \sin \theta - 16r \cos \theta + 424 \\ &= 2r^2 + 424 + 8r(7 \sin \theta - 2 \cos \theta) \\ &= 2r^2 + 424 + 8r \cdot \sqrt{53} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{したがって、} \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{53}}, \cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{53}}$$

$$-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1 \text{ より}$$

最小値

$$\begin{aligned} f(r) &= \sqrt{2r^2 - 8\sqrt{53}r + 424} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{r^2 - 4\sqrt{53}r + 212} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{(r - 2\sqrt{53})^2} \\ &= \sqrt{2} |r - 2\sqrt{53}| \end{aligned}$$

最大値

$$\begin{aligned} g(r) &= \sqrt{2r^2 + 8\sqrt{53}r + 424} \\ &= \sqrt{2} |r + 2\sqrt{53}| \end{aligned}$$

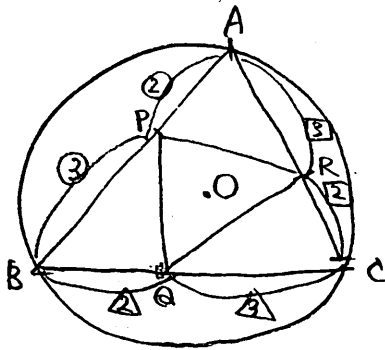
$f(r) = 0$ とするときは、 $r = 2\sqrt{53}$ のとき。

※ \vec{OR} を求めるときは、理系なら回転行列、文系の方は、 x 軸、 y 軸に垂線をおとしたときの三角形の合同を使うとよい。

点Oを中心とする円に内接する $\triangle ABC$ の3辺AB, BC, CAをそれぞれ2:3に内分する点をP, Q, Rとする。 $\triangle PQR$ の外心が点Oと一致するとき、 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

(2007 京都大・理)

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とする。



"点Oを中心とする円に $\triangle ABC$ が内接する" である。

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| \dots \textcircled{1}$$

" $\triangle PQR$ の外心が点Oと一致する" である。

$$\left| \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5} \right| = \left| \frac{3\vec{b} + 2\vec{c}}{5} \right| = \left| \frac{3\vec{c} + 2\vec{a}}{5} \right|$$

よって、

$$|3\vec{a} + 2\vec{b}| = |3\vec{b} + 2\vec{c}| = |3\vec{c} + 2\vec{a}|$$

$$\Leftrightarrow |3\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |3\vec{b} + 2\vec{c}|^2 = |3\vec{c} + 2\vec{a}|^2$$

$$\Leftrightarrow 9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{b} \cdot \vec{c} + 4|\vec{c}|^2 = 9|\vec{c}|^2 + 12\vec{c} \cdot \vec{a} + 4|\vec{a}|^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \quad (\textcircled{1} \text{より})$$

よって、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ である。

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{c}|^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$$

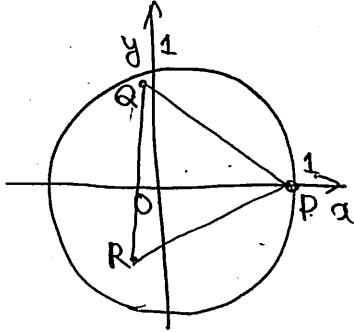
$$\Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{c}|^2$$

$$\Leftrightarrow AB = BC = CA.$$

よって、 $\triangle ABC$ は正三角形。

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P をとり、円の内部または周上に 2 点 Q, R を、 $\triangle PQR$ が 1 辺の長さ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形になるようにとる。このとき、 $OQ^2 + OR^2$ の最大値および最小値を求めよ。

(1979 東大・理)



上の図のように座標をとり、 $P \in (1, 0)$ に固定する。

$$\vec{OQ} = \vec{PQ} - \vec{PO}, \quad \vec{OR} = \vec{PR} - \vec{PO}$$

よって、

$$\begin{aligned} |\vec{OQ}|^2 + |\vec{OR}|^2 &= |\vec{PQ} - \vec{PO}|^2 + |\vec{PR} - \vec{PO}|^2 \\ &= |\vec{PQ}|^2 - 2\vec{PQ} \cdot \vec{PO} + |\vec{PO}|^2 \\ &\quad + |\vec{PR}|^2 - 2\vec{PR} \cdot \vec{PO} + |\vec{PO}|^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\vec{PQ} \cdot \vec{PO} + 1^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\vec{PR} \cdot \vec{PO} + 1^2$$

$$= \frac{14}{3} - 2\vec{PO} \cdot (\vec{PQ} + \vec{PR})$$

よって、QR の中点を M とすると、 $PM = 1$ より、 $\vec{PO} \cdot (\vec{PQ} + \vec{PR})$

$$= |\vec{PO}| \cdot |2\vec{PM}| \cdot \cos \theta = 2 \cos \theta$$

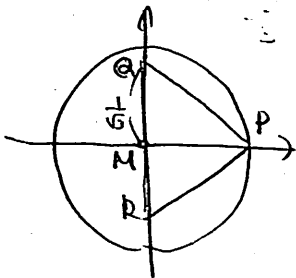
ただし、 θ は \vec{PO} と \vec{PM} のなす角である。

よって、

$$OQ^2 + OR^2 = \frac{14}{3} - 4 \cos \theta \dots *$$

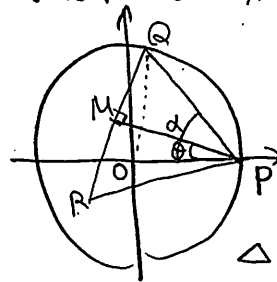
最小値は、 $\theta = 0$ のとき、すなわち

M と O が一致したときである。



$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

最大となるのは、 $\cos \theta$ が最小のとき
すなわち、 θ が最大となるときである。



よって、Q と R の
どちらかが周上にある。
今、Q が周上にあると
する。

$\triangle OPQ$ に注目し、 $\angle QPO = \alpha$

とすると、

$$\cos \alpha = \frac{1 + \frac{4}{3} - 1}{2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

よって、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - 30^\circ) &= \cos \alpha \cdot \cos 30^\circ + \sin \alpha \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{3 + \sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

よって、 $\cos \theta$ の最小値となる。

これに代入して、最大値は

$$\frac{2(4 - \sqrt{6})}{3}$$

(8) 中線定理より

$$OQ^2 + OR^2 = 2(OM^2 + MQ^2)$$

$$= 2(OM^2 + \frac{1}{3})$$

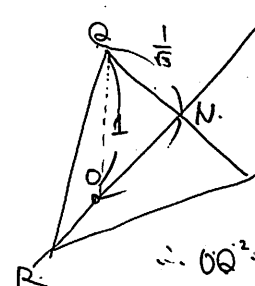
よって、最小値は O と M が一致するとき。

最大値は P, Q が周上にあるときである。

このとき、 $OQ = 1$ より、OR は何かはわからない。

直線 OR は、 $OQ = OP$, $RQ = RP$ より、線分

RQ の垂直二等分線である、PQ の中点を



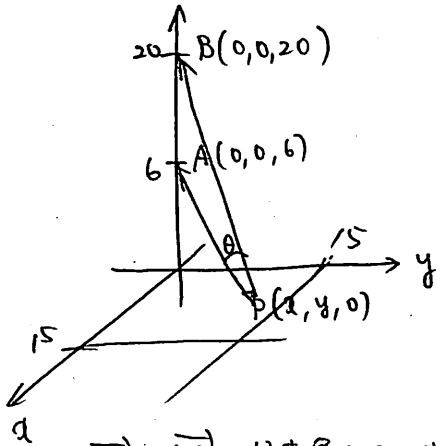
N とすると、

$$\begin{aligned} OR &= RN - ON \\ &= 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\therefore OQ^2 + OR^2 = 1^2 + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{2(4 - \sqrt{6})}{3}$$

空間に座標系が定められていて、 z 軸上に 2 点 $A(0,0,6)$, $B(0,0,20)$ が与えられている。 xy 平面上の点 $P(x,y,0)$ で、 $0 \leq x \leq 15$, $0 \leq y \leq 15$, $\angle APB \geq 30^\circ$ を満たすもの全体がつくる図形の面積を求めよ。

(1972 東大 2 次・文理)



\vec{PA} と \vec{PB} のなす角を θ とおくと、

$$\vec{PA} = (-x, -y, 6)$$

$$\vec{PB} = (-x, -y, 20)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + 6 \times 20}{\sqrt{x^2 + y^2 + 6^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 20^2}} \end{aligned}$$

$\angle APB \geq 30^\circ$ より

$$(0 <) \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ となる。}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{x^2 + y^2 + 6 \times 20}{\sqrt{x^2 + y^2 + 6^2} \sqrt{x^2 + y^2 + 20^2}}$$

両辺は正だから、2乗して整理すると、

$$3(x^2 + y^2 + 36)(x^2 + y^2 + 400) \geq 2^2(x^2 + y^2 + 120)^2$$

ここで、 $x^2 + y^2 = X$ とおくと、

$$3(X + 36)(X + 400) \geq 4(X + 120)^2$$

整理すると、

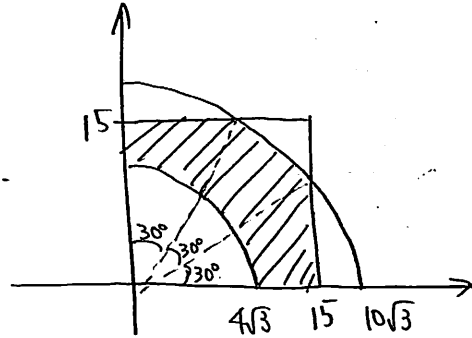
$$X^2 - 348X + 14400 \leq 0$$

$$(X - 48)(X - 300) \leq 0$$

よって

$$48 \leq x^2 + y^2 \leq 300$$

よって求める図形は、図の斜線部



よって求める面積は、

$$= \frac{1}{2} (10\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{6} + 15 \times 5\sqrt{3} - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (4\sqrt{3})^2$$

$$= 13\pi + 75\sqrt{3}$$

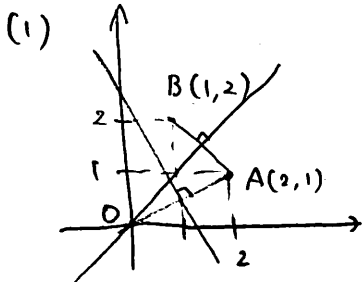
* 余弦定理を使っても可。

次の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の3点 $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(1,2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) t が実数全体を動くとき, xyz 空間内の点 $(t+2, t+2, t)$ がつくる直線を l とする。3点 $O(0,0,0)$, $A'(2,1,0)$, $B'(1,2,0)$ を通り, 中心を $C(a,b,c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき, a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2011 北海道大・理)



対称性より、線分 AB の垂直二等分線

は、 $y=x$... ①

OA の中点は $(1, \frac{1}{2})$ であるから、

線分 OA の垂直二等分線は、

$$y - \frac{1}{2} = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + \frac{5}{2} \dots \text{②}$$

①, ② の交点 h が中点 h かつ、解 h と

$$x = y = \frac{5}{6}$$

O と $(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ の距離を求めよ。

よって、この円の方程式は

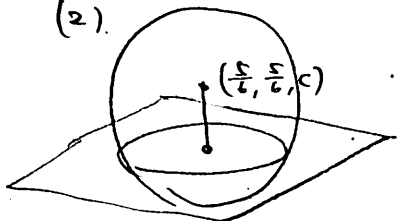
$$(x - \frac{5}{6})^2 + (y - \frac{5}{6})^2 = \frac{25}{18}$$

※ 素直に $x^2 + y^2 + ax + by = 0$

と仮定してもいい。対称性を使え

また、

(2)

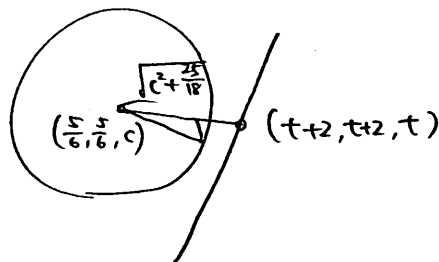


(1) より、球の中心の座標は

$$(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, c)$$

球の半径は、三平方の定理から

$$\sqrt{c^2 + \frac{25}{18}}$$



また、球の中心と $(t+2, t+2, t)$ の距離は

$$\sqrt{(t+2-\frac{5}{6})^2 + (t+2-\frac{5}{6})^2 + (t-c)^2}$$

よって、この半径より小さければよく、

$$2(t+\frac{7}{6})^2 + (t-c)^2 \leq c^2 + \frac{25}{18}$$

か、成り立つ t が存在すればいい。

整理すると

$$3t^2 + 2(\frac{7}{3}-c)t + \frac{4}{3} \leq 0$$

$$3(t + \frac{1}{3}(\frac{7}{3}-c))^2 - \frac{1}{3}(\frac{7}{3}-c)^2 + \frac{4}{3} \leq 0$$

$$\text{よって、} -\frac{1}{3}(\frac{7}{3}-c)^2 + \frac{4}{3} \leq 0$$

$$(c - \frac{7}{3})^2 - 4 \geq 0$$

$$(c - \frac{1}{3})(c - \frac{13}{3}) \geq 0$$

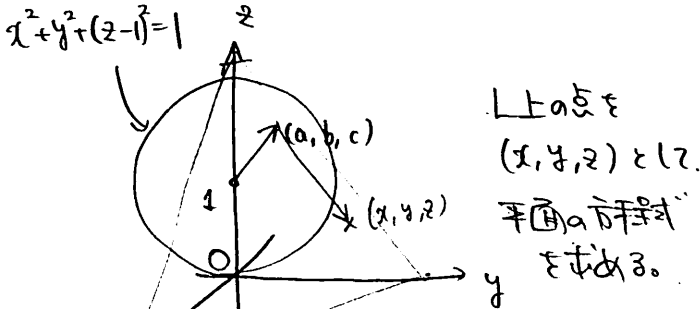
$$\therefore c \leq \frac{1}{3}, \frac{13}{3} \leq c$$

$$\text{よって } a = b = \frac{5}{6}, c \leq \frac{1}{3}, \frac{13}{3} \leq c$$

※ 単位に判別式でも OK.

xyz空間内の点P(0,0,1)を中心とする半径1の球面Kがある.K上の点Q(a,b,c)が条件 $a > 0, b > 0, c > 1$ のもとでK上を動くとき,QにおいてKに接する平面をLとし,Lがx軸,y軸,z軸と交わる点をそれぞれ,A,B,Cとする.このような三角形ABCの面積の最小値を求めよ.

(1987 東大・理)



L上の点を
(x,y,z)とし.
平面Lの方程式
をたてる.

2つの法線ベクトル $(x-a, y-b, z-c)$ と

$(a, b, c-1)$ が垂直だから

$$a(x-a) + b(y-b) + (c-1)(z-c) = 0 \dots \textcircled{1}$$

(a, b, c) は $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 上だから

$$a^2 + b^2 + (c-1)^2 = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \text{より } ax + by + (c-1)z = c$$

よって $x=y=z=0$ を代入し

x軸, y軸, z軸との交点をたてる.

$$A\left(\frac{c}{a}, 0, 0\right), B\left(0, \frac{c}{b}, 0\right),$$

$$C\left(0, 0, \frac{c}{c-1}\right)$$

ここで, 平面Lと原点Oの距離dをたてる

OからLに下した垂線の足をHとすると

$$\vec{OH} = k(a, b, c-1) \quad (k \text{ は実数})$$

よってHは平面L上だから

$$ka^2 + kb^2 + k(c-1)^2 = c$$

$$\textcircled{2} \text{より } k = c$$

ベクトル $(a, b, c-1)$ の大きさは1だから, $d = c$.

よって $\triangle ABC$ の面積 S は c . 三稜錐OABC

の体積を2通りで表すことにする.

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot d = \frac{1}{6} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{c-1}$$

$$\therefore S = \frac{c^2}{2ab(c-1)}$$

一方, $\textcircled{2}$ 式を変形し, $a > 0, b > 0$ より相加相乗不等式が

$$1 - (c-1)^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$$

等号は $a=b$ のとき成り立つ.

よって, $2ab$ の最大値は $1 - (c-1)^2$.

よって,

$$S = \frac{c^2}{(1 - (c-1)^2) \cdot (c-1)}$$

$$= \frac{c}{(2-c)(c-1)}$$

$$= \frac{c}{-c^2 + 3c - 2}$$

$$= \frac{1}{-c + 3 - \frac{2}{c}}$$

$$= \frac{1}{3 - (c + \frac{2}{c})}$$

$$\geq \frac{1}{3 - 2\sqrt{\frac{2}{c}}}$$

$$\geq \frac{1}{3 - 2\sqrt{\frac{2}{c}}}$$

($c > 0, \frac{2}{c} > 0$ より, 相加相乗平均の式より)
等号は $c = \frac{2}{c}$ のとき

よって

$$S \geq \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$$

($c = \sqrt{2}, a = b = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ のとき)