

# 離散の最終攻略

各回最後の問題は追加演習です。基本的には授業内で演習時間を確保します。

## 【第1回 整数】

$(x+1)(x-2)$  の小数第1位を四捨五入したものが  $1+5x$  と等しくなるような実数  $x$  を求めよ。

(1990 東工大・後)

3以上9999以下の奇数  $a$  で、 $a^2 - a$  が10000で割り切れるものをすべて求めよ。

(2005 東大・文理)

$\frac{10^{210}}{10^{10} + 3}$  の整数部分のけた数と、1の位の数字を求めよ。ただし

$$3^{21} = 10460353203$$

を用いてよい。

(1989 東大・理)

## 【第2回 格子点と場合の数】

3辺の長さが正の整数値である三角形のうち、1辺の長さが  $n$  で、他の2辺の長さが  $n$  以下となるものはいくつあるか。ただし、合同なものは同じとみなす。

(1979 北海道大)

$p, q$  を2つの正の整数とする。整数  $a, b, c$  で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え、このような  $a, b, c$  を  $[a, b; c]$  の形に並べたものを  $(p, q)$  パターンと呼ぶ。各  $(p, q)$  パターン  $[a, b; c]$  に対して

$$\omega([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく。

(1)  $(p, q)$  パターンのうち、 $\omega([a, b; c]) = -q$  となるものの個数を求めよ。また、 $\omega([a, b; c]) = p$  となる  $(p, q)$  パターンの個数を求めよ。

以下、 $p = q$  の場合を考える。

(2)  $s$  を  $p$  以下の整数とする。 $(p, p)$  パターンで  $\omega([a, b; c]) = -p + s$  となるものの個数を求めよ。

(2011 東大・文理)

3 個の赤玉と  $n$  個の白玉を無作為に環状に並べるものとする.このとき白玉が連続して  $k + 1$  個以上並んだ箇所が現れない確率を求めよ.ただし  $\frac{n}{3} < k < \frac{n}{2}$  とする.

(1989 東大・理)

【第 3 回 総合演習】

先頭車両から順に 1 から  $n$  までの番号のついた  $n$  両編成の列車がある.ただし  $n \geq 2$  とする.各車両を赤色,青色,黄色のいずれか一色を塗るとき,隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか.

(2005 京大・文理)

$p, q$  は正の整数とし,2 次方程式  $x^2 - px - q = 0$  の 2 解を  $\alpha, \beta$  とする. $A_n = \alpha^n + \beta^n$  とおくと,すべての自然数  $n$  について次のことが成り立つことを示せ.

- (1)  $A_n$  は正の整数である.
- (2)  $A_{3n} - A_n^3$  は 3 で割り切れる.

(1988 大阪大・文)

$n$  枚のカードを積んだ山があり,各カードには上から順番に 1 から  $n$  まで番号がつけられている.ただし  $n \geq 2$  とする.このカードの山に対して,次の試行を繰り返す.1 回の試行では,一番上のカードを取り,山の一番上にもどすか,あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う.これら  $n$  通りの操作はすべて同じ確率であるとする. $n$  回の試行を終えたとき,一番下にあったカード(番号  $n$ ) が山の一番上にきている確率を求めよ.

(2009 京都大・乙)