

$(x+1)(x-2)$ の小数第1位を四捨五入したものが $1+5x$ と等しくなるような実数 x を求めよ.

(1990 東工大・後)

条件より

$$(1+5x) - \frac{1}{2} \leq (x+1)(x-2) < (1+5x) + \frac{1}{2}$$

左みたし、かつ

$1+5x$ が整数

であることを示す。第1式より

$$-\frac{1}{2} \leq x^2 - 6x - 3 < \frac{1}{2}$$

$$\frac{23}{2} \leq (x-3)^2 < \frac{25}{2}$$

右みたす。また、 $1+5x$ が整数、すなわち $5x$ が整数であることを示す。

" x が整数ならば、小数第1位が"

2, 4, 6, 8 であることを示す"

であることを示す。

$$3 < \sqrt{11.5} = \sqrt{\frac{23}{2}} \leq |x-3| < \sqrt{\frac{25}{2}} = \sqrt{12.5} < 4$$

より、

$$3.2, 3.4, 3.6, 3.8$$

を調べると

$$3.2^2 = 10.24 \quad \times$$

$$3.4^2 = 11.56 \quad \circ$$

$$3.6^2 = 12.96 \quad \times$$

$$3.8^2 = 14.44 \quad \times$$

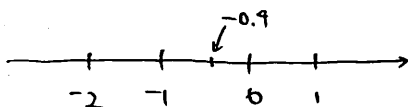
より、

$$|x-3| = 3.4$$

$$\text{よって } x = 6.4, -0.4$$

注) -0.4 の小数第1位を四捨五入すると

0 となる。



* -1.5 を四捨五入すると -1 になる。

(5を捨てる)

一般的に、四捨五入して整数 n になる数 x は

$$n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$$

であり、 n が負の数とすると、これを表すことができる。

3以上9999以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が10000で割り切れるものをすべて求めよ。

(2005 東大・文理)

$10000 = 2^4 \times 5^4$ である。

$a^2 - a = 2^4 \times 5^4 k$ (k は自然数)

とわかる。

一方、 $a^2 - a = a(a-1)$ となり、2連続自然数の積であり、 a は奇数、 $a-1$ は偶数であるから。

$a = 5^4 x, a-1 = 2^4 y$

とわかる。ただし、 x, y は互いに素である。

よって a を消去すると。

$625x - 1 = 16y$

$625x - 16y = 1$

ここで、 $625 = 16 \times 39 - 1$ だから。

この不定方程式の解の1つは。

$x = 1, y = 39$ である。

従って

$625x - 16y = 1$

$625 \cdot 1 - 16 \cdot 39 = 1$

よって

$625(x-1) = 16(y-39)$

16と625は互いに素だから

$x-1 = 16n$ (n は整数)

とわかる。このとき

$a = 5^4 x$

$= 625 \cdot (16n+1)$

$= 10000n + 625$

$3 \leq a \leq 9999$ より、 $n=0$ のみとわかる。

$a = 625$

※ 不定方程式の係数が大きいので互除法と考えると、1度筆算したら、解が見えたので、この路線に変更している。

③ 係数の大きい不定方程式は、互除法を使う。

例) $16x + 29y = 1$

$16 = a, 29 = b$ とする。

(考え方は、 $29 \equiv 16a$ 余りは a と b で表せる

はず。16をその余りでわつたものはまた、 a と b で

表せるはず... とわづらひます。よくよく小さいとわかる。

$29 = 1 \times 16 + 13$ より、 $13 = b - a$

$16 = 1 \times 13 + 3$ より、 $3 = 2a - b$

$13 = 3 \times 4 + 1$ より、 $1 = -9a + 5b$

よって、 $1 = -9 \times 16 + 5 \times 29$

とすれば、解の1つが求まる。

$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分のけた数と、1の位の数字を求めよ。ただし

$$3^{21} = 10460353203$$

を用いてよい。

(1989 東大・理)

$$\frac{10^{210}}{10^{11}} < \frac{10^{210}}{10^{10}+3} < \frac{10^{210}}{10^{10}}$$

$$\therefore 10^{199} < \frac{10^{210}}{10^{10}+3} < 10^{200}$$

よ、整数部分の桁数は200。

$$x = 10^{10} + 3 \text{ とおく}$$

$$10^{10} = x - 3 \text{ より}$$

$$10^{210} = (10^{10})^{21}$$

$$= (x-3)^{21}$$

$$= {}_{21}C_0 x^{21} - {}_{21}C_1 x^{20} \cdot 3 + {}_{21}C_2 x^{19} \cdot 3^2 \\ \dots + {}_{21}C_{20} x \cdot 3^{20} - {}_{21}C_{21} 3^{21}$$

とける。

整数 a, b に $x \pm 1, 10$ で割った余りが等しいとき $a \equiv b$ と表すことに

すると、 $x \equiv 3$ である。

$$\frac{10^{210}}{10^{10}+3} = \frac{x^{21} - {}_{21}C_1 x^{20} \cdot 3 + \dots + {}_{21}C_{20} x \cdot 3^{20} - 3^{21}}{x}$$

$$= x^{20} - {}_{21}C_1 x^{19} \cdot 3 + \dots + {}_{21}C_{20} 3^{20} - \frac{3^{21}}{x}$$

$$\equiv 3^{20} - {}_{21}C_1 3^{20} + \dots + {}_{21}C_{20} 3^{20} - \frac{3^{21}}{x}$$

$$\equiv 3^{20} \left(\underbrace{{}_{20}C_0 - {}_{21}C_1 + \dots + {}_{21}C_{20}}_{=0} \right) - \frac{3^{21}}{x}$$

よ、

$${}_{20}C_0 - {}_{21}C_1 + \dots + {}_{21}C_{20} - {}_{21}C_{21} = 0.$$

よ、 \sim 係数は1にたがらぬ。

$$\frac{10^{210}}{10^{10}+3} \equiv 3^{20} - \frac{3^{21}}{x}$$

$$\equiv 9^{10} - \frac{3^{21}}{x}$$

$$\equiv (-1)^{10} - \frac{3^{21}}{x}$$

$$\equiv 1 - \frac{3^{21}}{x}$$

よ、

$$\frac{3^{21}}{x} = \frac{10460353203}{10000000003}$$

$$= 1.04\dots$$

よ、1の位の数字は9。

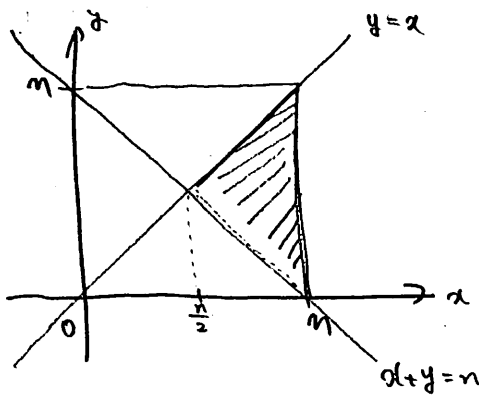
※ 1の位を求めよ。

$\Rightarrow \text{mod } 10$ を考えよ。

3辺の長さが正の整数値である三角形のうち、1辺の長さが n で、他の2辺の長さが n 以下となるものはいくつあるか。ただし、合同なものは同じとみなす。

(1979 北海道大)

3辺の長さを m, x, y とする。
 x と y の対称性から、 $x \geq y$ と
 してよい。条件から
 $x + y > m, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n$
 m に対する整数 x, y の個数を
 求める。



図の斜線部分

(ただし、 $y = x$ 上の点と $x = n$ 上の点は
 含み、 $x + y = m$ 上の点は含まない)
 にある格子点の数を数えたい
 ため。

i) m が偶数のとき
 $(\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$ も格子点になる。

$$\left(\left(\square - \circ \right) \times \frac{1}{2} - \text{---} \right) \times \frac{1}{2} + \text{---}$$

計算は

$$\left\{ \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} - \frac{n}{2} \right\} \times \frac{1}{2} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{1}{4} n(n+2)$$

ii) m が奇数のとき

$$\left\{ \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} - \frac{(n+1)}{2} \right\} \times \frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}$$

$$= \frac{n^2 - 1 + 2n + 2}{4}$$

$$= \frac{1}{4} (n+1)^2$$

よって、 m が偶数のとき $\frac{1}{4} n(n+2)$ 個
 m が奇数のとき $\frac{1}{4} (n+1)^2$ 個

※ 本当はこの部分の説明をきちんとした方が

※ $m = 1, 2$ または $1/2, n$ の場合も計算すること。

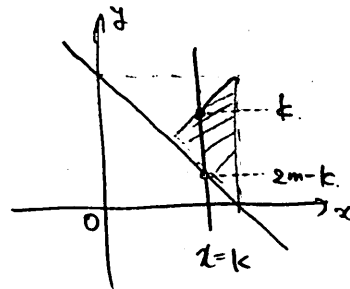
※ Σ を使うと以下が(角)。 m を整数とて

$m = 2m$ とす

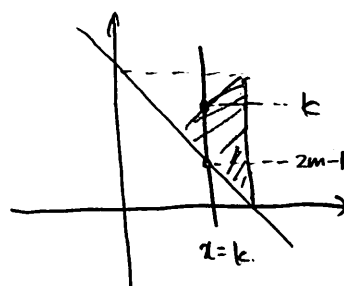
$x = m+1, m+2, \dots, 2m$ を考え

$x = k$ とす。 $k - (2m - k) = 2k - 2m$ 個
 格子点があるから。

$$\sum_{k=m}^{2m} (2k - 2m) = \dots \text{ と計算する}$$



$m = 2m - 1$ とす。



$k - (2m - 1 - k) = 2k - 2m + 1$

$$\sum_{k=m}^{2m-1} (2k - 2m + 1) = \dots$$

p, q を2つの正の整数とする. 整数 a, b, c で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え, このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ. 各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して

$$\omega([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく.

(1) (p, q) パターンのうち, $\omega([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ. また, $\omega([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ.

以下, $p = q$ の場合を考える.

(2) s を p 以下の整数とする. (p, p) パターンで $\omega([a, b; c]) = -p + s$ となるものの個数を求めよ.

(2011 東大・文理)

(1) $\omega([a, b; c]) = -q$ より

$$p - q - (a + b) = -q$$

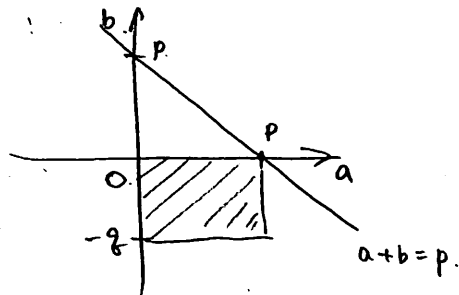
$$a + b = p \quad \dots \textcircled{1}$$

これを満たす a, b の組を求め,

$b \leq c \leq a$ を満たす c の数をそれぞれ数え合わせる. 条件より

$$-q \leq b \leq 0, \quad 0 \leq a \leq p \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, 図で表すと



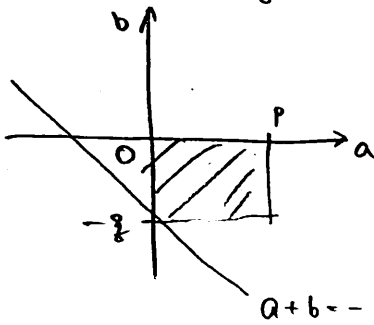
これを満たすのは, $(a, b) = (p, 0)$

のみであり, s として c は $0 \leq c \leq p$ の整数値をとるので $p+1$ 個.

同様に考えると

$$p - q - (a + b) = p$$

$$a + b = -q$$

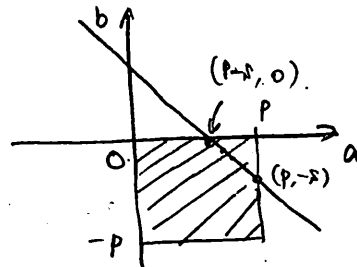


これを満たすのは, $(a, b) = (0, -q)$

のみであり, s として c は $-q \leq c \leq 0$ の整数値をとるので $q+1$ 個

(2) $p - p - (a + b) = -p + s$

$$a + b = p - s$$



i) $p - s > p$ のとき. 既して $p < 0$ かつ領域と直線は交わらないから. 個数 0.

ii) $p - s \leq p$ のとき. 既して $0 \leq a \leq p$ かつ

$(a, b) = (p - s, 0), (p - s + 1, -1), \dots, (p, p - s)$ であり, それぞれ c の個数は

$p - s + 1, p - s + 2, \dots, p + s + 1$ 個存在する.

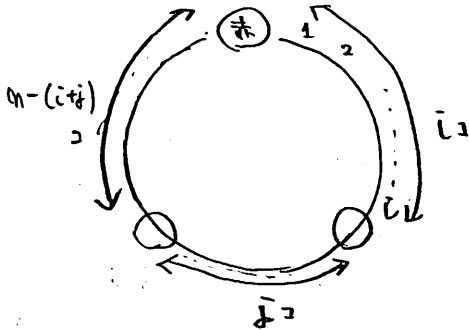
c の個数は公差 2, 項数 $s + 1$ の等差数列であり

$$\frac{(p - s + 1) + (p + s + 1)}{2} \times (s + 1)$$

$$= (p + 1)(s + 1) \text{ 個.}$$

3個の赤玉と n 個の白玉を無作為に環状に並べるものとする。このとき白玉が連続して $k+1$ 個以上並んだ箇所が現れない確率を求めよ。ただし $\frac{n}{3} \leq k < \frac{n}{2}$ とする。

(1989 東大・理)



図のように赤玉にはさまれる白玉の個数を c 個, j 個, $m - (c+j)$ 個とする。

条件より

$$0 \leq c \leq k, \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq j \leq k, \dots \textcircled{2}$$

$$0 \leq m - (c+j) \leq k, \dots \textcircled{3}$$

③を整理すると

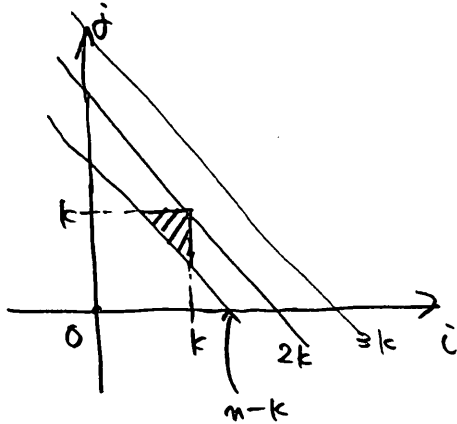
$$m - k \leq c+j \leq m$$

ここで $\frac{m}{3} \leq k < \frac{m}{2}$ より

$$2k \leq m \leq 3k,$$

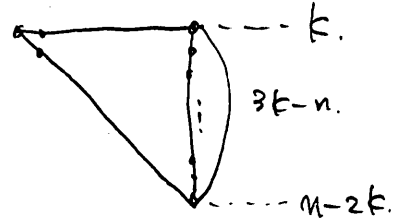
$$k \leq m - k \leq 2k$$

c, j 平面に図示すると次の通り



$$\begin{array}{ccc} \textcircled{m-k} \leq c+j \leq \textcircled{m} & & \\ \uparrow & & \uparrow \\ k \sim 2k & & 2k \sim 3k \end{array}$$

斜線部分の格子点の数は



$$1 + 2 + \dots + (3k - n + 1)$$

$$= \frac{1}{2} (3k - n + 1)(3k - n + 2)$$

全ての並べ方は $m+2 C_2$ (通り) であり、求める確率は

$$\frac{(3k - n + 1)(3k - n + 2)}{2 \cdot m+2 C_2} = \frac{(3k - n + 1)(3k - n + 2)}{(n+2)(n+1)}$$

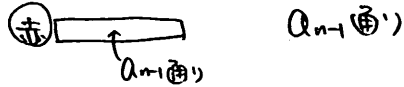
* 自分で設定した c と j が変数である。そのためグラフを作成する。

先頭車両から順に1からnまでの番号のついたn両編成の列車がある。ただし $n \geq 2$ とする。各車両を赤色、青色、黄色のいずれか一色を塗るとき、隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

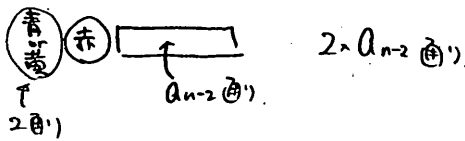
(2005 京大・文理)

n両のときの条件をみたす塗り方を a_n 通りとする。

i) 1両目が赤のとき



ii) 1両目が青か黄のとき



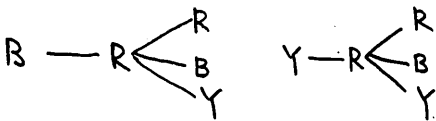
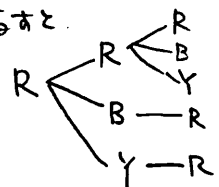
よって $n \geq 4$ のとき

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

よって $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$ ($n \geq 2$)

$n=2, 3$ のとき 赤をR, 青をB, 黄をYと

すると



よって $a_2 = 5, a_3 = 11.$

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0 \text{ より}$$

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n)$$

よって

$$a_{n+1} + a_n = 2^{n-2} \cdot (a_3 + a_2)$$

$$= 16 \cdot 2^{n-2}$$

$$= 2^{n+2} \dots \dots \textcircled{1}$$

また $a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n)$

より

$$a_{n+1} - 2a_n = (-1)^{n-2} \cdot (a_3 - 2a_2)$$

$$= (-1)^{n-2} \dots \dots \textcircled{2}$$

①②より

$$3a_n = 2^{n+2} - (-1)^{n-2}$$

$$a_n = \frac{2^{n+2} + (-1)^{n-1}}{3}$$

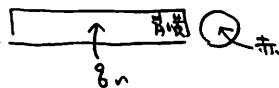
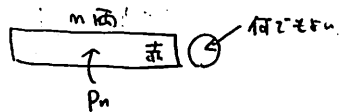
別解の目録

条件をみたす塗り方のうち

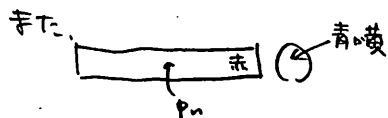
n両目が赤の場合の数を p_n

青か黄の場合の数を q_n

とする。(全体の塗り方の数は $p_n + q_n$)



と考えると $p_{n+1} = p_n + q_n \dots \dots \textcircled{1}$



と考えると $q_{n+1} = 2p_n \dots \dots \textcircled{2}$

①②より $p_{n+1} = p_n + 2p_{n-1}$

$p_2 = 3, q_2 = 2, p_3 = 5$ であり

よって 3項間漸化式を

解くと

p, q は正の整数とし、2次方程式 $x^2 - px - q = 0$ の2解を α, β とする。 $A_n = \alpha^n + \beta^n$ とおくと、すべての自然数 n について次のことが成り立つことを示せ。

- (1) A_n は正の整数である。
 (2) $A_{3n} - A_n^3$ は3で割り切れる。

(1988 大阪大・文)

(※ 先に解と係数を思いつかなくても
 与えられた α^n, β^n を作ることもまず
 その方程式を利用して漸化式を作る)

(1) α, β は $x^2 - px - q = 0$ の解だから

$$\alpha^2 - p\alpha - q = 0.$$

両辺に α^n をかけた

$$\alpha^{n+2} - p\alpha^{n+1} - q\alpha^n = 0.$$

同様に

$$\beta^{n+2} - p\beta^{n+1} - q\beta^n = 0.$$

辺を加えると

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} - p(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - q(\alpha^n + \beta^n) = 0.$$

よって

$$A_{n+2} - pA_{n+1} - qA_n = 0.$$

$$\therefore A_{n+2} = pA_{n+1} + qA_n.$$

ここで、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = p, \quad \alpha\beta = -q.$$

となる。

$$A_1 = \alpha + \beta = p$$

$$A_2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= p^2 + 2q$$

よって、 p, q もともに正の整数であるから
 A_1, A_2 は正の整数である。

A_k, A_{k+1} が正の整数と仮定する。

$$A_{k+2} = pA_{k+1} + qA_k.$$

よって、 A_{k+2} も正の整数になる。

A_1, A_2 も正の整数だから、帰納的に

A_n は正の整数である。

$$(2) A_{3n} = \alpha^{3n} + \beta^{3n}$$

$$= (\alpha^n + \beta^n)^3 - 3\alpha^n\beta^n(\alpha^n + \beta^n)$$

$$= A_n^3 - 3(-q)^n A_n$$

よって

$$A_{3n} - A_n^3 = -3(-q)^n A_n.$$

q, A_n は(正の)整数だから、これは3の倍数である。

よって、示された。

(※ (1)の帰納法では、 A_1, A_2 の2つを仮定する。

n 枚のカードを積んだ山があり、各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geq 2$ とする。このカードの山に対して、次の試行を繰り返す。1 回の試行では、一番上のカードを取り、山の一番上にもどすか、あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。 n 回の試行を終えたとき、一番下にあったカード (番号 n) が山の一番上にきている確率を求めよ。

(2009 京都大・乙)

n 回の試行のうち、1 回だけ「 n 」が
上にはカードが入る。これを k 回目とし、
これを n 回の試行のうち、 k 回目の試行で

ただし、 $1 \leq k \leq n$ 。

$$P_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{k-1}{n} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdots \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{(n-1)! (n-k)}{n^n}$$

ただし、 $k=1$ のときは

$$P_1 = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{(n-1)! (n-1)}{n^n} \leftarrow P_k \text{ (} k=1 \text{ のとき) (2つ)$$

$k=n$ のときは

$$P_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

\downarrow
= n が一番上
「 n 」が一番上

$$= \frac{(n-1)!}{n^n}$$

よって求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n-1} P_k + P_n$$

$$= \frac{(n-1)!}{n^n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) + \frac{(n-1)!}{n^n}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n^n} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \right\}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n^n} \left\{ 1 + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \right\}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n^n} \left\{ 1 + \frac{1}{2} n(n-1) \right\}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n^n} \left(\frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} n + 1 \right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{2 n^n} (n^2 - n + 2)$$

※ $n=2$ のとき $\frac{1}{2}$ となることを確認しよう。

