

領域の最終攻略

各回最後の問題は追加演習です。基本的には授業内で演習時間を確保します。

【第1回 多変数関数】

多変数関数は、

- ・ 1文字固定
 - ・ 文字消去
 - ・ $x = \frac{a}{b}$ とおくなどの置き換えで文字を減らす
 - ・ 対称式に注目
- などが基本的な技

全ての正の実数 x, y に対し

$$(x+y)^2 \geq k(x^2+y^2)$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

(有名問題)

$P = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ とする。

(1) 任意の実数 a, b, c に対して, $P \geq 0$ を示せ。

(2) $0 \leq a \leq 1, 1 \leq b \leq 2, 2 \leq c \leq 3$ のときの P の最小値を求めよ。

(甲南大)

【第2回 $(x+y, xy)$ の範囲】

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとり得る値の範囲を求めよ。

(2012 京都大)

座標平面上の点 (x, y) が $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ の範囲を動くとき, 点 $(x+y, xy)$ の動く範囲を図示せよ。

また, このとき $\frac{xy+m}{x+y+2}$ (m は定数) の最大値を求めよ。

(上智大)

【第3回 動きのあるものと領域】

放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線 l と、点 $B(b, b^2)$ における接線 m との交点を C とおく。ただし、 $a < b$ とする。

(1) 2直線 l, m と放物線 $y = x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ。

(2) 点 C が放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ。

(1998 一橋大)

s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$ とおく。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$ とおく。 s, t が実数全体を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2012 東北大・理)

xy 平面上で、円 $C: x^2 + y^2 = 1$ の外部にある点 $P(a, b)$ を考える。

点 P から円 C に引いた2つの接線の接点を Q_1, Q_2 とし、線分 Q_1Q_2 の中点を Q とする。点 P が円 C の外部で $x(x - y + 1) < 0$ を満たす範囲にあるとき、点 Q の存在する範囲を図示せよ。

(1994 京大・後・文)