

全ての正の実数 x, y に対し

$$(x+y)^2 \leq k(x^2+y^2)$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

(有名問題)

$x > 0, y > 0$ とする。

$$(x+y)^2 \leq k(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \leq k$$

よって、 $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ の最大値を求めたい。

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} &= \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1+2\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2}{1+(\frac{y}{x})^2} \quad (\because x \neq 0) \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{y}{x} = t (> 0)$ とおき

この式を $f(t)$ とすると

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1+2t+t^2}{1+t^2} \\ &= 1 + \frac{2t}{1+t^2} \\ &= 1 + \frac{2}{t+\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

ここで、 $t > 0, \frac{1}{t} > 0$ より、相加相乗平均より

$$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

等号は $t = \frac{1}{t}$ のとき、 $t > 0$ より必ず $t = 1$ のとき

よって、 $f(t)$ の最大値は $1 + \frac{2}{2} = 2$

($t=1$ より、 $x=y$ のとき)

① 3乗の場合もやってみるとよい。
(最小値は4になる)

② 式を

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k\sqrt{2x+y}$$

にすると、東大1995の問題になる。

各項の次数が全て同じ式 $a < 2$ を

同次式とみる。このように $\frac{y}{x} = a$ と式にすると、
よくある手段。

③ 略解

$$\begin{aligned} \frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^3+y^3} &= \frac{1+3t+3t^2+t^3}{1+t^3} \\ &= 1 + \frac{3t(t+1)}{t^3+1} \\ &= 1 + \frac{3t}{t^2-t+1} \\ &= 1 + \frac{3}{t-1+\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

④

実はシュワルツで一般。

だから、練習としてやっておくこと。

$P = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ とする.

(1) 任意の実数 a, b, c に対して, $P \geq 0$ を示せ.

(2) $0 \leq a \leq 1, 1 \leq b \leq 2, 2 \leq c \leq 3$ のときの P の最小値を求めよ.

(甲南大)

(1). $P = \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0.$

等号は $a=b=c$ のとき.

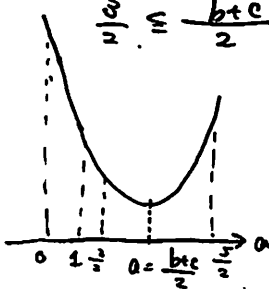
(2). a を変数, b, c を定数と(2)する.

$$\begin{aligned} P &= a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc \\ &= \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 - \frac{(b+c)^2}{4} + b^2 + c^2 - bc \\ &= \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + \frac{3}{4}c^2 - \frac{3}{2}bc. \end{aligned}$$

軸は $a = \frac{b+c}{2}$.

$1 \leq b \leq 2, 2 \leq c \leq 3$ より.

$$\frac{a}{2} \leq \frac{b+c}{2} \leq \frac{5}{2}$$



$0 \leq a \leq 1$ より, $a=1$ のとき最小値.

$$1 - (b+c) + b^2 + c^2 - bc.$$

$$= b^2 - (c+1)b + c^2 - c + 1$$

とる.

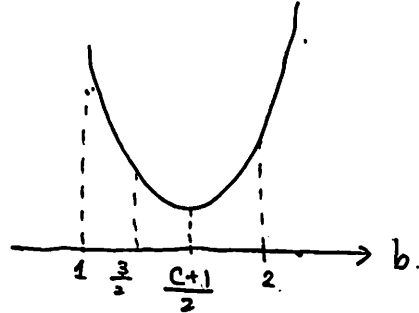
この式を $f(b)$ と置き, b を変数と(2)する.

$$\begin{aligned} f(b) &= \left(b - \frac{c+1}{2}\right)^2 - \frac{(c+1)^2}{4} + c^2 - c + 1 \\ &= \left(b - \frac{c+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 - \frac{3}{2}c + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

軸は $b = \frac{c+1}{2}$.

$2 \leq c \leq 3$ より

$$\frac{a}{2} \leq \frac{c+1}{2} \leq 2$$

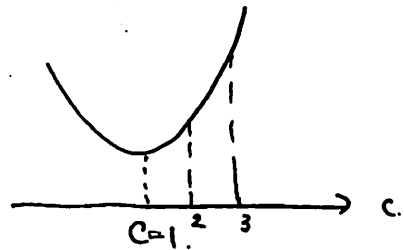


$1 \leq b \leq 2$ より $b = \frac{c+1}{2}$ のとき最小値

$$\frac{3}{4}c^2 - \frac{3}{2}c + \frac{3}{4}$$

とる. この式を $g(c)$ と置く.

$$g(c) = \frac{3}{4}(c-1)^2.$$



$2 \leq c \leq 3$ より, $c=2$ のとき最小値 $\frac{3}{4}$.

よって $P \geq b^2 - (c+1)b + c^2 - c + 1 \geq \frac{3}{4}c^2 - \frac{3}{2}c + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}.$

ここで等号は同時に成立するときは.

すなわち $c=2, b=\frac{3}{2}, a=1$ のとき

最小値 $\frac{3}{4}$

② $|a-b|$ を考えよう.

$|a-b|$ は b を固定すると $a=1$ のとき最小値

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ とする.

$|b-c|$ は b を固定すると $c=2$ のとき最小値

$1 \leq b \leq 2$ とする.

$|c-a|$ は $c=2, a=1$ のとき最小値 1

よって P の最小値は $\frac{1}{2} \{ (1-b)^2 + (b-2)^2 + 1 \}$

の最小値を考えるとよい. これは b の二次関数であり

... 以下略.

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとり得る値の範囲を求めよ.

(2012 京都大)

(実数条件を使う, 対称式なので
 $x+y, xy$ に直し, 解と係数に
 持ち込めという指針に気づこう)

$x+y = s, xy = t$ とする.

x, y は $X^2 - sX + t = 0$ の解であり
 実数であることより, $s^2 - 4t \geq 0$ を得る.
 ... ①

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = s^2 - t$$

よって $s^2 - t = 6$... ②

$$\begin{aligned} \text{求める} \quad x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y &= xy(x+y) - (x+y)^2 + x + y \\ &= st - s^2 + s \end{aligned}$$

②より $t = s^2 - 6$ 代入

$$\begin{aligned} (st) &= s(s^2 - 6) - s^2 + s \\ &= s^3 - s^2 - 5s \end{aligned}$$

ここで $t = s^2 - 6$ より ①に代入して

$$s^2 - 4(s^2 - 6) \geq 0$$

$$-3s^2 + 24 \geq 0$$

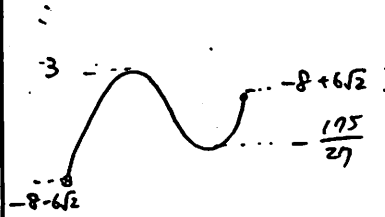
$$-2\sqrt{2} \leq s \leq 2\sqrt{2}$$

よって $f(s) = s^3 - s^2 - 5s$ とする

$$f'(s) = 3s^2 - 2s - 5$$

$$= (s+1)(3s-5)$$

s	$-2\sqrt{2}$...	-1	...	$\frac{5}{3}$...	$2\sqrt{2}$
$f'(s)$		+	0	-	0	+	
$f(s)$	$-8-6\sqrt{2}$	↗	3	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	$-8+6\sqrt{2}$



$$-8+6\sqrt{2} < 3, \quad -8-6\sqrt{2} < -\frac{175}{27}$$

よって 範囲は

$$-8-6\sqrt{2} \leq (st) \leq 3$$

③ 全ちんじゆ, $t = s^2 - 6$ 代入

$$3 - (-8+6\sqrt{2})$$

$$= 15 - 6\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{225} - \sqrt{172}$$

$$> 0$$

よって $-8+6\sqrt{2} < 3$ 確認

座標平面上の点 (x, y) が $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ の範囲を動くとき、点 $(x+y, xy)$ の動く範囲を図示せよ。

また、このとき $\frac{xy+m}{x+y+2}$ (m は定数) の最大値を求めよ。

(上智大)

$X = x+y, Y = xy$ とおく。

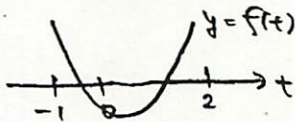
$t = x+y$ の 2 次方程式

$$t^2 - Xt + Y = 0$$

を考えると、この方程式の 2 解が x, y である。

$f(t) = t^2 - Xt + Y$ とおく。

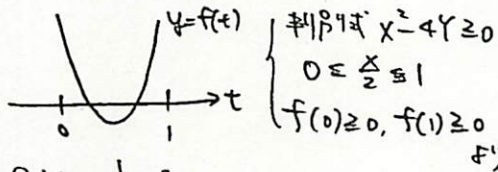
i) $-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2$ のとき



$f(-1) \geq 0, f(0) \leq 0, f(2) \geq 0$ より

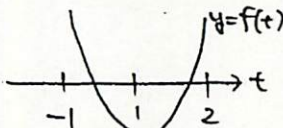
$$\begin{cases} Y \geq -x-1 \\ Y \leq 0 \\ Y \geq 2x-4 \end{cases}$$

ii) $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ のとき



$$\begin{cases} Y \leq \frac{1}{4}X^2 \\ 0 \leq X \leq 2 \\ Y \geq 0, Y \geq X-1 \end{cases}$$

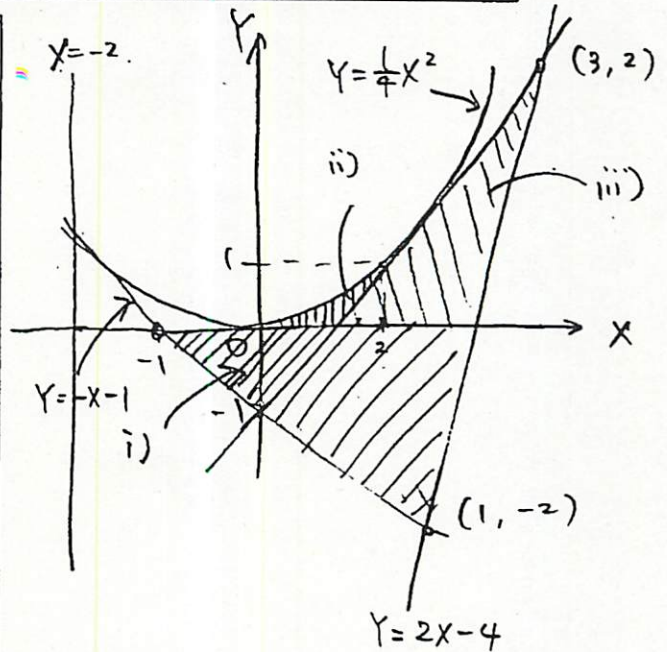
iii) $-1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$ のとき



$f(-1) \geq 0, f(1) \leq 0, f(2) \geq 0$ より

$$\begin{cases} Y \geq -x-1 \\ Y \leq x-1 \\ Y \geq 2x-4 \end{cases}$$

以上より、求める領域は図の斜線部分。境界を含む。



$\frac{xy+m}{x+y+2} = k$ とおく。

$Y+m = k(X+2)$ より $(-2, -m)$ を通る直線を表し、傾きは k である。

$(-2, -m)$ をとり、傾きを考えると k が最大となるのは $(3, 2)$ を通るとき $(-1, 0)$ を通るときの傾きである。

両方通るときの傾きは $\frac{1}{2}$ であり、 k の直線の $X=-2$ 上の点は $(-2, -\frac{1}{2})$ である。

(つまり $m = \frac{1}{2}$)

このより、上方にあるときは

$(3, 2)$ を通るとして

RPS $k = \frac{m+2}{5}$ であり

最大。

下方にあるときは

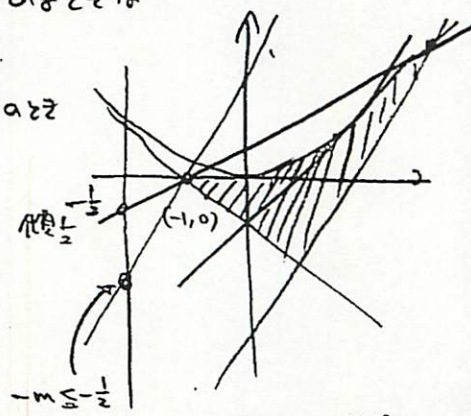
$(-1, 0)$ を通るとして

RPS $k = m$

のとき最大。

よって、 k の最大値は $m \leq \frac{1}{2}$ のときは $(-1, 0)$ を通るときの傾き

$$\begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } \frac{m+2}{5} \\ m \geq \frac{1}{2} \text{ のとき } m \end{cases}$$



放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線 l と、点 $B(b, b^2)$ における接線 m との交点を C とおく。ただし、 $a < b$ とする。

(1) 2直線 l, m と放物線 $y = x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ。

(2) 点 C が放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ。

(1998 一橋大)

(1). A における接線の式は

$$y' = 2x \text{ より}$$

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

$$y = 2ax - a^2$$

同様に、 B における接線の式は

$$y = 2bx - b^2$$

であり、交点の座標は

$$\left(\frac{a+b}{2}, ab \right)$$

であるから、求める面積は

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \{x^2 - (2bx - b^2)\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - bx^2 + b^2x \right]_{\frac{a+b}{2}}^b = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

(2). $C(x, y)$ とおくと

$$a+b = 2x, \quad ab = y$$

である。

$$b-a > 0 \text{ かつ}$$

$$\sqrt{b-a} \text{ が最小} \Leftrightarrow b-a \text{ が最小} \Leftrightarrow (b-a)^2 \text{ が最小}$$

であるから

$$(b-a)^2 = (b+a)^2 - 4ab$$

$$= 4x^2 - 4y$$

$$= 4x^2 - 4\left(\frac{1}{2}x^2 - x - 2\right)$$

$$= 2x^2 + 4x + 8$$

$$= 2(x+1)^2 + 6$$

よって、 $(b-a)^2$ は $x = -1$ のとき最小値 6 である。よって、 $b-a = \sqrt{6}$ であるから

$$(\sqrt{6} \text{ の最小値}) = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{6}^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

* (1) は既知の内容なので

あまりとくに計算していません。



s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$ とおく。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。
- (2) $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$ とおく。 s, t が実数全体を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2012 東北大・理)

($s \geq 0, t \geq 0$ は条件式。
 s と t を x, y に直せば、このとき
 x, y になる。)

(1) 2式をたし。

$$x + y = 2s$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}(x + y)$$

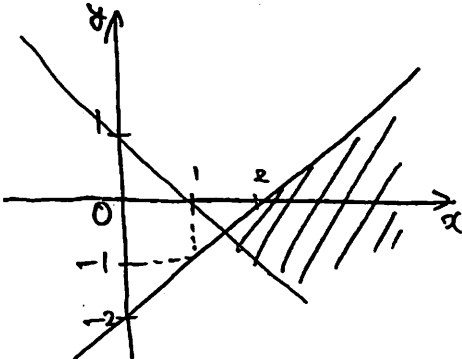
2式をひく

$$x - y = 2t + 2.$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}(x - y - 2)$$

$$s \geq 0, t \geq 0 \text{ より}$$

$$x + y \geq 0, x - y - 2 \geq 0.$$



求める領域は図の斜線部分
 境界含む。

(2). $x = t(s-1) + (s-1) + 2.$
 $= (s-1)(t+1) + 2.$
 $y = (s-1) + (t+1) - 1.$

より。

$$(s-1)(t+1) = 2 - x.$$

$$(s-1) + (t+1) = y + 1.$$

より。 s, t が実数 $\Leftrightarrow s-1, t+1$ が実数
 なる。 u についての2次方程式

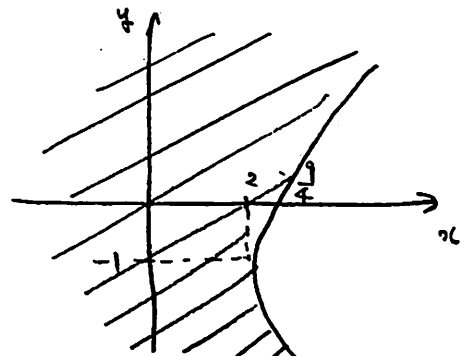
$$u^2 - (y+1)u + (2-x) = 0$$

が実数解をもてばよい。

$$(y+1)^2 - 4 \cdot (2-x) \geq 0$$

$$(y+1)^2 \geq 4(x-2)$$

より求める領域は



図の斜線部。境界含む。

xy平面上で、円C: $x^2 + y^2 = 1$ の外部にある点P(a, b)を考える。

点Pから円Cに引いた2つの接線の接点を Q_1, Q_2 とし、線分 Q_1Q_2 の中点をQとする。
点Pが円Cの外部で $x(x-y+1) < 0$ を満たす範囲にあるとき、点Qの存在する範囲を図示せよ。

(1994 京大・後・文)

$Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$ とする。

それぞれに引いた接線は

$$x_1x + y_1y = 1$$

$$x_2x + y_2y = 1$$

と点P(a, b)を通るから

$$ax_1 + by_1 = 1$$

$$ax_2 + by_2 = 1$$

よって $ax + by = 1$ を考えると Q_1, Q_2

はこの直線上にある。よって Q_1, Q_2 を

通る直線は $ax + by = 1$ 。

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax + by = 1 \end{cases}$$

よって y を消去すると $b \neq 0$ のとき

$$x^2 + \left(-\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}\right)^2 = 1$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)x^2 - 2\frac{a}{b^2}x + \frac{1}{b^2} - 1 = 0$$

この解を x_1, x_2 とする。解と係数の関係

$$\begin{aligned} \text{よって } x_1 + x_2 &= \frac{2\frac{a}{b^2}}{1 + \frac{a^2}{b^2}} \\ &= \frac{2a}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

同様に計算して

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

よって中点を (x, y) とすると

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad \dots *$$

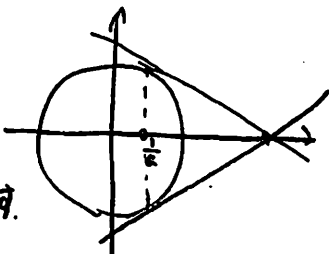
$b = 0$ のとき

$$ax = 1 \text{ (よって)}$$

a をたかす

$$x = \frac{1}{a}$$

よって x をたかす



(a, b) は円Cの外部で $x(x-y+1) < 0$

よって

$$a^2 + b^2 > 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a(a-b+1) < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$* \text{よって } x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2} \text{ (よって)}$$

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

よって $\textcircled{1} \textcircled{2}$ に代入すると

$$\textcircled{1} \text{よって } \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} > 1$$

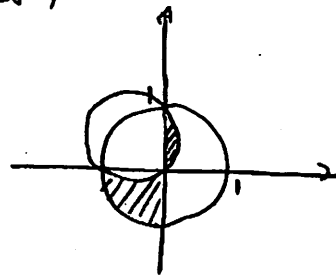
$$\therefore 1 > x^2 + y^2$$

$\textcircled{2}$ よって

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} + 1 \right) < 0$$

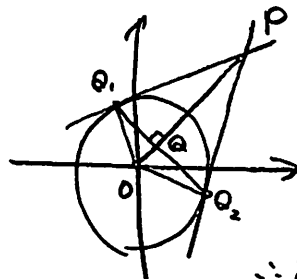
$$x(x^2 + y^2 + x - y) < 0$$

よって



図の斜線部分が
境界含まない

* 前半は相似を使うと、よりスマートに。



$$\triangle OQ_1Q \sim \triangle POQ_1$$

よって

$$\frac{OQ_1}{1} = \frac{OQ}{\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{OP}{1}$$

$$\therefore OQ = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OQ} &= \frac{OQ}{OP} \vec{OP} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$