

追加演習

xy 平面において、 x 座標、 y 座標が共に整数である点 (x, y) を格子点という。いま、互いに異なる 5 つの格子点を任意に選ぶと、その中に次の性質をもつ格子点が少なくとも一対は存在することを示せ。

一対の格子点を結ぶ線分の中点がまた格子点となる。

(1996 早稲田大・政経)

a, b は実数で、 $a^2 + b^2 = 16$, $a^3 + b^3 = 44$ を満たしている。このとき、

(1) $a + b$ の値を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とすると、 $a^n + b^n$ は 4 で割り切れる整数であることを示せ。

(1997 東大・文)

xy 平面において、 x 座標、 y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点にもつ三角形 ABC を考える。

(1) 辺 AB, AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとすると、辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。

(2) 辺 AB, AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在するとすると、三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。

(1992 東大・文理)

正三角形 ABC の頂点 A から辺 AB とのなす角が θ の方向に、三角形の内部に向かって出発した光線を考える。ただし、 $0^\circ < \theta < 60^\circ$ とする。この光線は三角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し、頂点に達するとそこで止まるものとする。また、三角形の内部では光線は直進するものとする。

(1) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき、この光線はどの頂点に到達するかを述べよ。

(2) 正の整数 k を用いて $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき、この光線の到達する頂点を求め、またそこへ至るまでの反射の回数を k を用いて表せ。

(1997 東大・理)