

xy 平面において、 x 座標、 y 座標が共に整数である点 (x, y) を格子点という。いま、互いに異なる 5 つの格子点を任意に選ぶと、その中に次の性質をもつ格子点が少なくとも 1 対は存在することを示せ。

一对の格子点を結ぶ線分の中点がまた格子点となる。

(1996 早稲田大・政経)

格子点の座標は

$(偶, 偶), (偶, 奇), (奇, 偶), (奇, 奇)$

の組のいずれかになる。

よて、5 つの格子点を選ぶと、少なくとも 1 組は x, y 座標ともに偶奇が一致している。

a, b を奇数とすると

$\frac{a+b}{2}$ は整数で、

c, d を偶数とすると

$\frac{c+d}{2}$ は整数である。

よて、そのような 1 組を選べば、中点は格子点になる。

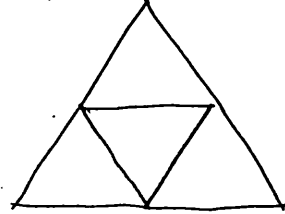
※ $n+1$ 匹の鳩が n 個の巣箱がある。すべての鳩が巣箱に入っているとき、少なくとも 1 つの巣箱には 2 匹以上入っている。

これはディリクレの原理もしくは鳩ノ巣原理という。

類 1989. 元島大教

1辺の長さが 2 の正三角形の内部に任意の 5 個の点 E, T, S と、その内の 2 点 T, S の距離が 1 より小さい E の少なくとも 1 組存在することを示せ。

<略解>

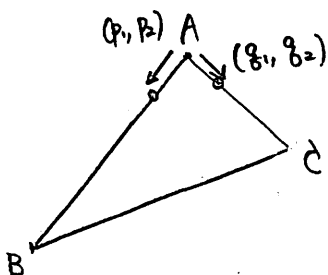


たのように合同な三角形に分割すれば、少なくとも 1 組は同じ正三角形内にあり、その距離が 1 より小さい。

xy 平面において、 x 座標、 y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点にもつ三角形 ABC を考える。

- (1) 辺 AB , AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとすると、辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。
- (2) 辺 AB , AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在するとすると、三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。

(1992 東大・文理)



(1) AB 上の格子点のうち、 A に一番近い格子点を P とし、 $\overrightarrow{AP} = (p_1, p_2)$ とする。

同様に AC 上の格子点のうち、 A に一番近い格子点を Q とし、 $\overrightarrow{AQ} = (g_1, g_2)$ とする。

よって、 p_1, p_2, g_1, g_2 は整数。
 AB は奇数個の格子点を持つから、格子点により、偶数個に分割される。

よって、 n を整数として

$$\overrightarrow{AB} = 2n(p_1, p_2)$$

をかける。同様に m を整数として

$$\overrightarrow{AC} = 2m(g_1, g_2)$$

をかける。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2(mg_1 - np_1, mg_2 - np_2) \end{aligned}$$

$mg_1 - np_1, mg_2 - np_2$ は整数だから BC の中点 M とすると、 M は格子点である。よって、 BM, CM 上の両端を除いた格子点の数は等しい。
 BC 上の格子点の数はそれに M の 1 つを加えることにより、奇数となる。

(2). (1) で、 $n = m = 2$ とすればよい。

$$\text{よって、} \overrightarrow{AB} = 4(p_1, p_2)$$

$$\overrightarrow{AC} = 4(g_1, g_2)$$

よって、 $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |4p_1 \cdot 4g_2 - 4g_1 \cdot 4p_2|$$

$$= 8 |p_1 g_2 - g_1 p_2|$$

よって、 S は 8 で割り切れる整数である。

a, b は実数で, $a^2 + b^2 = 16, a^3 + b^3 = 44$ を満たしている. このとき,

(1) $a + b$ の値を求めよ.

(2) n を 2 以上の整数とすると, $a^n + b^n$ は 4 で割り切れる整数であることを示せ.

(1997 東大・文)

(1). $a^2 + b^2 = 16$ より

$$(a+b)^2 - 2ab = 16$$

$$\therefore ab = \frac{(a+b)^2 - 16}{2}$$

$$a^3 + b^3 = 44$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 44$$

$$a^2 + b^2 = 16, ab = \frac{(a+b)^2 - 16}{2} \text{ を代入して}$$

$$(a+b)\left(16 - \frac{(a+b)^2 - 16}{2}\right) = 44$$

よって, $a+b = p$ とすると

$$p\left(16 - \frac{1}{2}p^2 + 8\right) = 44$$

整理すると

$$p^3 - 48p + 88 = 0$$

$$(p-2)(p^2 + 2p - 44) = 0$$

$$p = 2, -1 \pm 3\sqrt{5}$$

また, $ab = q$ とすると, a, b は実数

$$\text{だから, } p^2 - 4q \geq 0$$

$$p^2 - 4 \cdot \frac{p^2 - 16}{2} \geq 0$$

$$p^2 \leq 32$$

$$-4\sqrt{2} \leq p \leq 4\sqrt{2} \quad \dots *$$

よって

$$(-1 + 3\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{2})^2$$

$$= 14 - 6\sqrt{5}$$

$$= \sqrt{196} - \sqrt{180} > 0$$

$$-1 + 3\sqrt{5} > 0, 4\sqrt{2} > 0 \text{ より}$$

$$-1 + 3\sqrt{5} > 4\sqrt{2}$$

同様に考えると

$$-1 - 3\sqrt{5} < -4\sqrt{2}$$

よって, * を満たす p は

$$p = 2 \text{ のみにつき}$$

$$\therefore a + b = 2$$

(2) $n = 2$ のときは 4 で割り切れる
の:

$$k \geq 2 \text{ として, } a^k + b^k, a^{k+1} + b^{k+1}$$

が 4 で割り切れるとすると

$$a^{k+2} + b^{k+2} \text{ も 4 で割り切れる}$$

を示す。

$$a^{k+2} + b^{k+2} = (a+b)(a^{k+1} + b^{k+1}) - ab(a^k + b^k)$$

(1) より $a+b = 2, ab = -6$ より, $a+b$ と ab は整数。

仮定より, $a^{k+1} + b^{k+1}, a^k + b^k$ は 4 で割り切れる

のとき, $a^{k+2} + b^{k+2}$ は 4 で割り切れる。

以上の, 数学的帰納法により示す。

