

関数の最終攻略

各回最後の問題は追加演習です。基本的には授業内で演習時間を確保します。

第1回の追加問題は非公開です。

【第1回 方程式と解】

関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ の、区間 $-\frac{7}{4} \leq x \leq 3$ での最大値と最小値を求めよ。

(1991 東大・文)

$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$ とする。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ。また、 $1 < \alpha < 2$ であることを示せ。

(2) 方程式 $g(x) = 0$ の正の解を β とする。 α と β の大小を比較せよ。

(3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ。

(2003 一橋大)

【第2回 放物線上の2点が動くとき】

放物線 $y = x^2$ 上に、直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる2点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。

(2001 一橋大)

長さ l の線分が、その両端を放物線 $y = x^2$ の上において動く。この線分の midpoint M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし、 $l > 1$ とする。

(1974 東大2次・文理)

$a > 0$ に対して、次の2つの放物線を考える。

$$C_1: y = x^2 + \frac{1}{a^2}, \quad C_2: y = -(x-a)^2$$

(1) C_1, C_2 の両方に接するような直線が、つねに2本存在することを示せ。

(2) (1) で定まる4つの接点がつくる四角形の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

(1989 東大・文)

【第3回 微積総合】

2つの曲線 $y = x^3 - x, y = x^2 - a$ が1点 P を通り, P において共通の接線をもっている.
この2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1990 京都大・文理)

関数 $y = x^3 - ax$ のグラフ上の点 P における接線 T_p がこのグラフと再び交わる点を Q とする.ただし, T_p がこのグラフと共有する点が P 以外にないときは $Q = P$ と定める.

- (1) P の x 座標を c として, Q の座標を求めよ.
- (2) 点 Q におけるこのグラフへの接線が T_p と直交するような P は何個あるか.

(1989 京都大・文)

平面上に放物線 $y = x^2 - 5x + 6$ と直線 $y = kax - a^2 - 5a$ がある.

- (1) すべての実数 a に対して放物線と直線が異なる2点で交わるような定数 k の範囲を求めよ.
- (2) (1) で求めた範囲にあって, 放物線と直線で囲まれる部分の面積が a によらず一定になるような定数 k を求めよ.

(1997 一橋大)