

関数 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ の、区間 $-\frac{7}{4} \leq x \leq 3$ での最大値と最小値を求めよ。
(1991 東大・文)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x < \alpha \text{ かつ } x > \beta$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$\text{とす。 } \alpha = \frac{2 - \sqrt{13}}{3}, \beta = \frac{2 + \sqrt{13}}{3}$$

とす。と

$$\begin{aligned} \alpha - \left(-\frac{7}{4}\right) &= \frac{2 - \sqrt{13}}{3} + \frac{7}{4} \\ &= \frac{29 - 8\sqrt{13}}{12} \\ &= \frac{\sqrt{841} - \sqrt{832}}{12} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{かつ } -\frac{7}{4} < \alpha$$

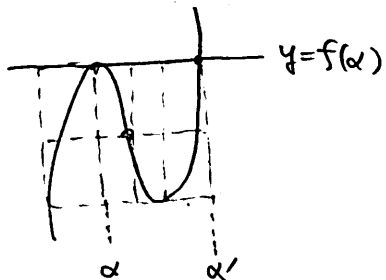
$$\begin{aligned} 3 - \beta &= \frac{7 - \sqrt{13}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{49} - \sqrt{13}}{3} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{かつ } 3 > \beta$$

よって増減表は次の通り

x	$-\frac{7}{4}$	\dots	α	\dots	β	\dots	3
$f'(x)$			$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			\nearrow	極大	\searrow	極小	\nearrow

$f(\alpha)$ と $f(3)$ の大小を比較する。



$y = f(\alpha)$ と $y = f(x)$ の
グラフの交点を考え、 α と α' とする。

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 3x + 4 &= \alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha + 4 \\ \text{とすると、この3次方程式の解は} \\ \alpha (\text{重解}) \text{ と } \alpha' \text{ となる。} \end{aligned}$$

解と係数の関係より

$$\alpha + \alpha + \alpha' = 2$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= 2 - 2\alpha \\ &= 2 - \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

$$\alpha' - 3 = \frac{2\sqrt{13} - 7}{3} = \frac{\sqrt{52} - \sqrt{49}}{3} > 0$$

$$\text{かつ } 3 < \alpha' \text{ となる。}$$

$x = \alpha$ で最大となる。このとき

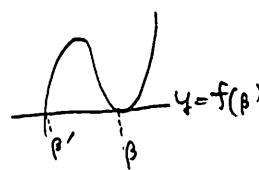
$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{9} \\ 3x^2 - 4x - 3 \overline{) x^3 - 2x^2 - 3x + 4} \\ \underline{x^3 - \frac{4}{3}x^2 - x} \\ -\frac{2}{3}x^2 - 2x + 4 \\ \underline{-\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3}} \\ -\frac{26}{9}x + \frac{10}{3} \end{array}$$

よって

$$f(\alpha) = f'(x) \left(\frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{9}\right) - \frac{26}{9}\alpha + \frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= -\frac{26}{9}\alpha + \frac{10}{3} \\ &= \frac{-26(2 - \sqrt{13}) + 90}{9} \\ &= \frac{27}{38 + 26\sqrt{13}} \\ &= \frac{27}{27} \text{ 最大値} \end{aligned}$$

同様に β についても計算する。



$$2\beta + \beta' = 2$$

$$\begin{aligned} \beta' &= 2 - 2\beta \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta' - \left(-\frac{7}{4}\right) &= \frac{2 - 2\sqrt{13}}{3} + \frac{7}{4} \\ &= \frac{29 - 8\sqrt{13}}{12} \\ &= \frac{\sqrt{841} - \sqrt{832}}{12} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \beta' > -\frac{7}{4} \text{ かつ } \alpha = -\frac{7}{4} \text{ となる。}$$

最小となる。このとき

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{7}{4}\right) &= -\frac{343}{64} - \frac{49}{8} + \frac{21}{4} + 4 \\ &= -\frac{143}{64} \text{ 最小値} \end{aligned}$$

以上より
最大値 $\frac{38 + 26\sqrt{13}}{27}$
最小値 $-\frac{143}{64}$

$f(x) = x^3 - x^2 - x - 1, g(x) = x^2 - x - 1$ とする.

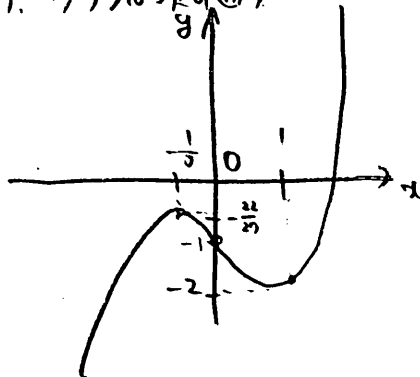
- (1) 方程式 $f(x) = 0$ はただひとつの実数解 α をもつことを示せ. また, $1 < \alpha < 2$ であることを示せ.
 (2) 方程式 $g(x) = 0$ の正の解を β とする. α と β の大小を比較せよ.
 (3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ.

(2003 一橋大)

(1) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
 $= (3x+1)(x-1)$
 よ. $f'(x) = 0$ の解は $-\frac{1}{3}, 1$.

x	...	$-\frac{1}{3}$...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	$-\frac{22}{27}$	\searrow	-2	\nearrow

よ. $f(x)$ は次の通り



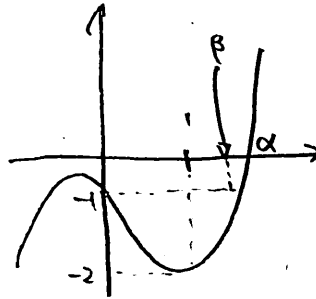
よ. x 軸との交点は1個だけあり
 たゞひとつの実数解. また,
 $f(1) = -2 < 0$.
 $f(2) = 1 > 0$.
 よ. $y = f(x)$ は連続だから
 この実数解 α は $1 < \alpha < 2$ である.

(2) $g(x) = 0$ の解は β だから
 $\beta^2 - \beta - 1 = 0$.

また,

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \beta^3 - \beta^2 - \beta - 1 \\ &= \beta(\beta^2 - \beta - 1) - 1 \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

よ. 図に示す通り



よ. $\alpha < \beta$ である.

(3) $\beta^2 = \beta + 1$ よ.
 $\beta^3 = \beta(\beta + 1)$
 $= \beta^2 + \beta$
 $= 2\beta + 1$

よ. β は $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解だから

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ である.}$$

よ. $\beta^3 = 2 + \sqrt{5}$.

$2 < \sqrt{5} < 3$ よ. $\beta^3 > 4$.

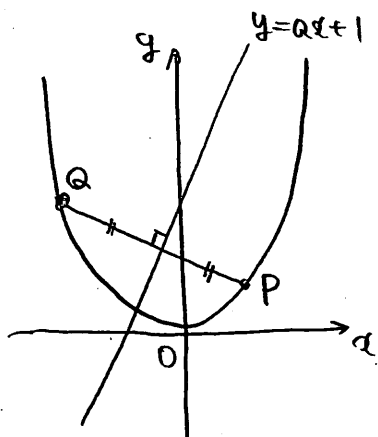
また, $1 < \alpha < 2$ よ. $1 < \alpha^2 < 4$

よ.

$$\alpha^2 < 4 < \beta^3 \text{ よ. } \alpha^2 < \beta^3$$

放物線 $y = x^2$ 上に、直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる2点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。

(2001 一橋大)



$P(p, p^2), Q(q, q^2)$ とする。ただし、 $p \neq q$ 。
 条件 PQ と $y = ax + 1$ が直交するから

$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} \cdot a = -1$$

$$p + q = -\frac{1}{a} \dots \textcircled{1}$$

条件 PQ の中点は $y = ax + 1$ 上にあるから

$$\frac{p^2 + q^2}{2} = a \cdot \frac{p + q}{2} + 1$$

① を使えば計算すると

$$p^2 + q^2 = 1 \dots \textcircled{2}$$

①、② をみたす p, q が存在するならば、

①、② を pq 平面にみたとき、共有点が存在するから、点と直線の距離の式が成り立つ。

$$\frac{|\frac{1}{a}|}{\sqrt{2}} < 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < |a|$$

$$\therefore a < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} < a$$

別

$$\textcircled{2} \text{ より } pq = \frac{1 - a^2}{2a^2}$$

より p, q は

$$t^2 + \frac{1}{a}t + \frac{1 - a^2}{2a^2} = 0$$

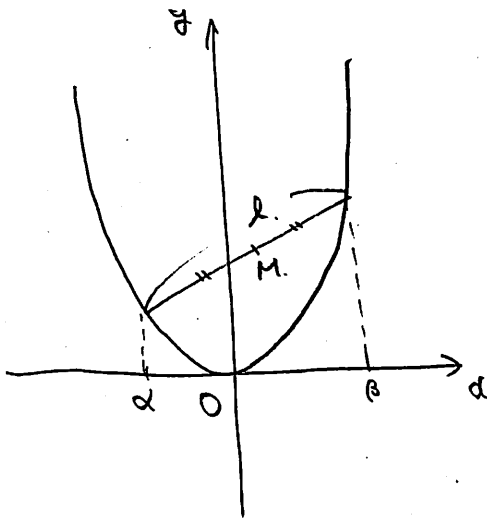
の2解。この異なる2つの実数解をも

のとき、 $D > 0$

とやればよい。

長さ l の線分が、その両端を放物線 $y = x^2$ の上に乗せて動く。この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし、 $l \geq 1$ とする。

(1974 東大 2 次・文理)



図のように
 2 の端点を
 $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$
 とする。
 (ただし $\alpha < \beta$)

$\therefore \alpha$ と β の中点 M の座標は

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right)$$

となる。また、長さが l であるから

$$l^2 = (\beta - \alpha)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2$$

$$= (\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2(\beta + \alpha)^2$$

$$\beta + \alpha = p, \quad \beta - \alpha = q \text{ とおくと}$$

$$l^2 = q^2 + q^2 p^2$$

$$\alpha = \frac{p - q}{2}, \quad \beta = \frac{p + q}{2}$$

よって $M(\alpha, y)$ とおくと

$$y = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(p - q)^2}{4} + \frac{(p + q)^2}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4}(p^2 + q^2)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{l^2 - q^2}{q^2} + q^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(q^2 + \frac{l^2}{q^2} - 1 \right)$$

$q^2 > 0$ より、相加相乗平均の関係より

$$\frac{1}{4} \left(q^2 + \frac{l^2}{q^2} - 1 \right) \geq \frac{1}{4} (2\sqrt{q^2 \cdot \frac{l^2}{q^2}} - 1)$$

$$= \frac{1}{4} (2l - 1)$$

等号は $q^2 = \frac{l^2}{q^2}$ のとき

$$\text{すなわち } q^2 = l, \quad p^2 = \frac{l^2 - q^2}{q^2} = \frac{l^2 - l}{l} = l - 1$$

($l \geq 1$ より $l - 1 \geq 0$) のとき成立する。

よって y の最小値は $\frac{1}{4}(2l - 1)$ である。

$\therefore \alpha$ と β

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{p}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{l - 1}$$

よって

$$\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{l - 1}, \frac{1}{4}(2l - 1) \right)$$

* p, q とおきかえたとすると、必ず q が l より大きくなる。

$$y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}, \quad l^2 = (\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2(\beta + \alpha)^2$$

のとき $y = (\alpha$ と l の式) にするのは難しい。

よって、おきかえは q と l の式) にして、 q が l より小さいに扱う。

(別)

$$(\beta, \beta^2) \text{ を } (\alpha + l \cos \theta, \alpha^2 + l \sin \theta)$$

とみて処理しても可。

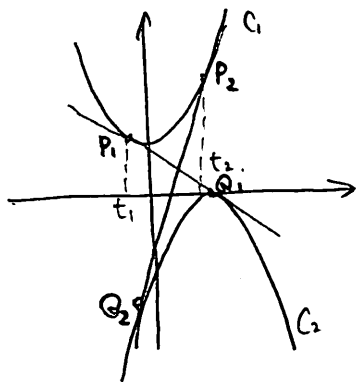
$a > 0$ に対して、次の2つの放物線を考える。

$$C_1: y = x^2 + \frac{1}{a^2}, \quad C_2: y = -(x-a)^2$$

(1) C_1, C_2 の両方に接するような直線がつねに2本存在することを示せ。

(2) (1) で定まる4つの接点がつくる四角形の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

(1989 東大・文)



(1) C_1 の $x=t_1$ における接点係数

$$y - (t_1^2 + \frac{1}{a^2}) = 2t_1(x - t_1)$$

$$y = 2t_1x - t_1^2 + \frac{1}{a^2}$$

ここで $y = -(x-a)^2$ に接する a^2

$$2t_1x - t_1^2 + \frac{1}{a^2} = -(x-a)^2$$

つまり $x^2 + (2t_1 - 2a)x - t_1^2 + \frac{1}{a^2} + a^2 = 0$... ①

は重根をもつ。

(だから、判別式を Δ とすると $\Delta = 0$)

$$\text{ここで} \quad 2t_1^2 - 2at_1 - \frac{1}{a^2} = 0 \quad \dots \text{②}$$

を得る。この2解が接点の x 座標となり、判別式を Δ とすると

$$\Delta = a^2 + 2 \cdot \frac{1}{a^2} > 0.$$

より、解を必ず2つもつことがわかる。

(2) ②の解を t_1, t_2 とすると

解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = a, \quad t_1 \cdot t_2 = -\frac{1}{2a^2}$$

上図のように P_1, P_2, Q_1, Q_2 をとると

$S(a)$ は $\overline{P_1Q_1}, \overline{P_2Q_2}$ を作らば

平行四辺形の面積の半分である。

②をみたすと、①の解は

$$x = a - t \pm \sqrt{\frac{1}{a^2}} = a - t.$$

とすると

$$P_1(t_1, t_1^2 + \frac{1}{a^2}), \quad Q_1(a - t_1, -t_1^2)$$

$$P_2(t_2, t_2^2 + \frac{1}{a^2}), \quad Q_2(a - t_2, -t_2^2)$$

よって

$$\overline{P_1Q_1} = (a - 2t_1, -2t_1^2 - \frac{1}{a^2})$$

$$\overline{P_2Q_2} = (a - 2t_2, -2t_2^2 - \frac{1}{a^2})$$

よって

$$2\Delta = \left| (a - 2t_1) \cdot (-2t_2^2 - \frac{1}{a^2}) - (a - 2t_2) \cdot (-2t_1^2 - \frac{1}{a^2}) \right|$$

$$= \left| -2at_2^2 - \frac{2}{a} + 4t_1t_2^2 + 2 \cdot \frac{t_1}{a^2} \right.$$

$$\left. - (-2at_1^2 - \frac{2}{a} + 4t_2t_1^2 + 2 \cdot \frac{t_2}{a^2}) \right|$$

$$= \left| -2a(t_2^2 - t_1^2) + 4t_1t_2(t_1 - t_2) - \frac{2}{a^2}(t_2 - t_1) \right|$$

$$= \left| (t_2 - t_1) \left(-2a(t_2 + t_1) + 4t_1t_2 - \frac{2}{a^2} \right) \right|$$

$$= \left| (t_2 - t_1) \left(-2a^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2a^2}\right) - \frac{2}{a^2} \right) \right|$$

$$= \left| (t_2 - t_1) \left(-2a^2 - \frac{4}{a^2} \right) \right|$$

$$\text{ここで} \quad (t_2 - t_1)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1t_2$$

$$= a^2 + \frac{2}{a^2}$$

$$\text{より} \quad 2\Delta = 2 \left(a^2 + \frac{2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Delta = \left(a^2 + \frac{2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$a^2 > 0, \frac{2}{a^2} > 0$ より相加相乗平均の式より

$$a^2 + \frac{2}{a^2} \geq 2\sqrt{2}$$

(等号は $a = 2^{\frac{1}{4}}$ のとき)

よって

Δ の最小値は

$$(2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} = 4 \cdot 2^{\frac{1}{4}}$$

* 出たところ P_1 における接点係数 $y = 2px - p^2 + \frac{1}{a^2}$

Q における接点係数 $y = -2(q-a)x + q^2 - a^2$

と係数比較して条件を出してやる。

2つの曲線 $y = x^3 - x$, $y = x^2 - a$ が1点Pを通り, Pにおいて共通の接線をもっている.
この2つの曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.

(1990 京都大・文理)

$$f(x) = x^3 - x, \quad g(x) = x^2 - a \text{ とする}$$

Pのx座標をtとする.

$$f(t) = g(t) \text{ かつ } f'(t) = g'(t)$$

より,

$$\begin{cases} t^3 - t = t^2 - a \\ 3t^2 - 1 = 2t \end{cases}$$

第2式より, $3t^2 - 2t - 1 = 0$

$$(3t+1)(t-1) = 0$$

$$t = 1, -\frac{1}{3}$$

i) $t = 1$ のとき.

第1式より, $a = 1$.

交点を求める.

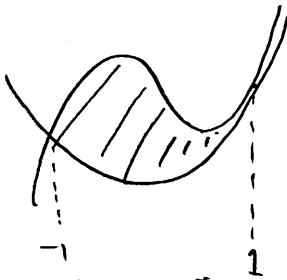
$$x^3 - x = x^2 - 1$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1, 1$$

よって, グラフの根拠形は下図.



よって, 求める面積は,

$$\int_{-1}^1 \{(x^3 - x) - (x^2 - 1)\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3}$$

ii) $t = -\frac{1}{3}$ のとき.

$$a = -\frac{5}{27}$$

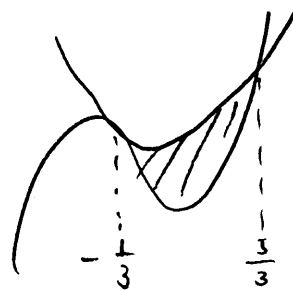
交点を求める. $x^3 - x = x^2 + \frac{5}{27}$

$$x^3 - x^2 - x + \frac{5}{27} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \left(x - \frac{5}{3}\right) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}$$

よって, グラフの根拠形は下図.



よって求める面積は,

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left\{ x^2 + \frac{5}{27} - (x^3 - x) \right\} dx$$

$$= - \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \left(x - \frac{5}{3}\right) dx$$

$$= - \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3} - 2\right) dx$$

$$= - \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left\{ \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \right\} dx$$

$$= - \left[\frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{3}\right)^4 \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} + 2 \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{3}\right)^3 \right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$

$$= -4 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^3$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}$$

(参考) $\int_a^b (x-a)^2(x-b) dx = -\frac{1}{12}(b-a)^4$
 \downarrow
 $x-a+a-b$ と計算

関数 $y = x^3 - ax$ のグラフ上の点 P における接線 T_p がこのグラフと再び交わる点を Q とする。ただし、 T_p がこのグラフと共有する点が P 以外にないときは $Q = P$ と定める。

(1) P の x 座標を c として、 Q の座標を求めよ。

(2) 点 Q におけるこのグラフへの接線が T_p と直交するような P は何個あるか。

(1989 京都大・文)

(1) $y' = 3x^2 - a$ より

$T_p: y = (3c^2 - a)(x - c) + c^3 - ac$

これと $y = x^3 - ax$ と連立すると

$(3c^2 - a)(x - c) + c^3 - ac = x^3 - ax$

$(x - c)^2(x + 2c) = 0$

$\therefore x = c, -2c$

よって $Q(-2c, -8c^3 + 2ac)$

(2) Q における接線の傾き a の値を ϵ とし、 $|2c^2 - a$

より $(3c^2 - a)(2c^2 - a) = -1$

をみたす c が $0 < c < \epsilon$ であるかを考えたい。

変形すると

$36c^4 - 15ac^2 + a^2 + 1 = 0$

とみる。 $c^2 = X$ とおくと

$36X^2 - 15aX + a^2 + 1 = 0$

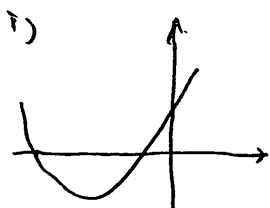
が $X > 0$ をみたす解を $0 < X < \epsilon$ となるかを考えたい。

$f(X) = 36X^2 - 15aX + a^2 + 1$

とみる。 $f(0) > 0$ であるから、根の範囲を考慮したい。

判別式 $D = 9(9a^2 - 16)$

軸 $X = \frac{5a}{24}$ であるから

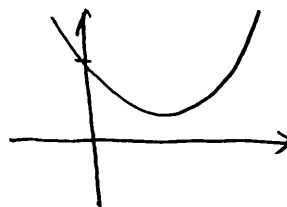


$\frac{5a}{24} < 0$ とき、即ち

$a < 0$ とき

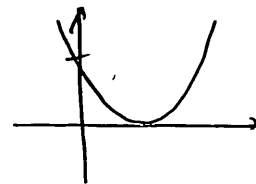
左図の解なし。

ii) $a \geq 0$ かつ $D < 0$ とき、即ち $a < \frac{4}{3}a$ とき



左図の解なし

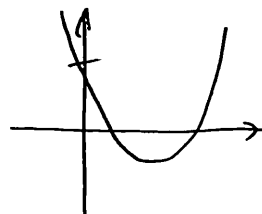
iii) $a \geq 0$ かつ $D = 0$ とき、即ち $a = \frac{4}{3}a$ とき



X は正の解 1 つあり

$\Rightarrow c$ は 2 個

iv) $a \geq 0$ かつ $D > 0$ とき、即ち $a > \frac{4}{3}a$ とき



X は正の解 2 つあり

$\Rightarrow c$ は 4 個

まとめると

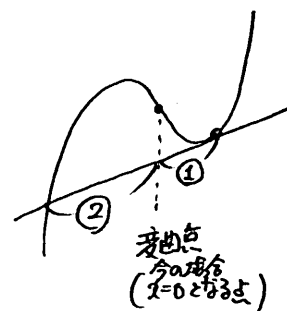
$a > \frac{4}{3}a$ とき 4 個

$a = \frac{4}{3}a$ とき 2 個

$a < \frac{4}{3}a$ とき 0 個

* 変曲点 ($y'' = 0$ をみたす点)

を考えると



比は $2a$ より 1 に 2 である

一方 c は $2c$

より $-2c$ となる。

となる。

平面上に放物線 $y = x^2 - 5x + 6$ と直線 $y = kx - a^2 - 5a$ がある。

- (1) すべての実数 a に対して放物線と直線が異なる 2 点で交わるような定数 k の範囲を求めよ。
 (2) (1) で求めた範囲において、放物線と直線で囲まれる部分の面積が a によらず一定になるような定数 k を求めよ。

(1997 一橋大)

(1) y を消去して

$$x^2 - 5x + 6 = kx - a^2 - 5a$$

$$x^2 + (-5-k)x + a^2 + 5a + 6 = 0 \quad \dots * \\ \text{判別式を } D \text{ とすると}$$

$$D = (-5-k)^2 - 4(a^2 + 5a + 6) \\ = (k^2 - 4)a^2 + 10(k-2)a + 1$$

すなわち実数 a に対して $D > 0$ であるならば

i) $k^2 - 4 \neq 0$ のとき

$$\begin{cases} k^2 - 4 > 0 \quad \dots \textcircled{1} \\ |5(k-2)^2 - (k^2 - 4)| < 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より $k < -2, 2 < k$

②より $24k^2 - 100k + 104 < 0$
 $6k^2 - 25k + 26 < 0$
 $(k-2)(6k-13) < 0$
 $2 < k < \frac{13}{6}$

ii) $k^2 - 4 = 0$ のとき

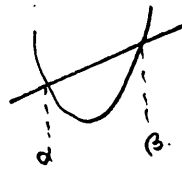
$k = 2$ のとき $D = 1$ となり常に $D > 0$

$k = -2$ のとき $D = -40a + 1$

となり $-40a + 1 < 0$ となる a は
 定数 a にとりてき不適

以上より $2 \leq k < \frac{13}{6}$

(2)



放物線と直線の交点の
 x 座標を α, β とすると
 囲まれた部分の面積は
 $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ である。

従って $\beta - \alpha$ が一定であればよい。

また α, β は x の 2 解である。

$$\alpha + \beta = 5 + k$$

$$\alpha\beta = a^2 + 5a + 6$$

従って

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ = (5 + k)^2 - 4(a^2 + 5a + 6) \\ = (k^2 - 4)a^2 + 10(k-2)a + 1$$

よって a によらず一定である

$$k^2 - 4 = 0 \text{ かつ } k - 2 = 0$$

$$\therefore k = 2$$