

**t で切れ！**

【例題】連立方程式  $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi \\ 0 \leq z \leq \sin(x+y) \end{cases}$  をみたす点  $(x, y, z)$  全体からなる空間図形を  $D$  とする.

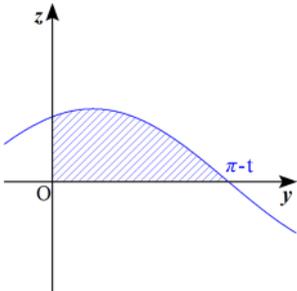
- (1)  $x$  軸上の点  $(t, 0, 0)$  を通り、 $x$  軸に垂直な平面で切ったときの切り口の面積  $S(t)$  を求めよ。  
 (2)  $D$  の体積  $V$  を求めよ.

(東海大)

全体像を予想するのは自由だが、解答には必要ない。切断面さえ分かれば、積分するだけで体積を求めることができる。切断面は基本的に  $x = t$  を代入すればよい。この考え方は、教科書でいうと、球面の方程式で切断面を考えるとときなどに出てくる。例えば、球面の方程式に  $z = t$  を代入すると、球面を平面  $z = t$  で切った時の切断面の図形の式になる。(  $z$  は  $t$  に置き変わっているため、 $x, y$  のみの式になっている。) この問題では、平面  $x = t$  で切った面を考えるので、 $x = t$  を代入する。

**【解答】**

(1)  $x = t$  を代入すると、3 つ目の式は、 $0 \leq z \leq \sin(t + y)$  となる。 $z = \sin(t + y)$  のグラフを  $yz$  平面で表すと、 $z = \sin y$  を  $-t$  平行移動したグラフになり、図の斜線部分。



よって、  

$$S(t) = \int_0^{\pi-t} \sin(t+y) dy$$

$$= [-\cos(t+y)]_0^{\pi-t}$$

$$= 1 + \cos t$$
 (2) 
$$V = \int_0^{\pi} (1 + \cos t) dt$$

$$= \dots = \pi$$

**【1】**  $xyz$  空間において連立不等式  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 1 \geq 0$  の表す立体を考える。  
 (1) この立体を  $z = t$  で切ったときの断面を  $xy$  平面に図示し、この断面の面積  $S(t)$  を求めよ。  
 (2) この立体の体積を求めよ。  
 (北海道大)

$z = t$  による切断面を考えればよく、様々な要素が確認できる良問である。切断面は例題同様、 $z = t$  を代入するだけでよい。

**【解答】**

$z = t$  を代入すると、  

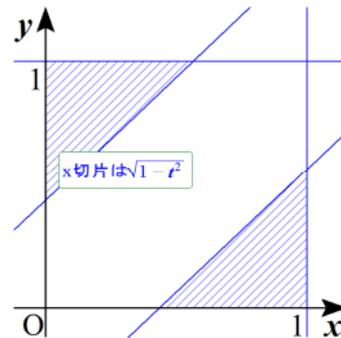
$$x^2 + y^2 + t^2 - 2xy - 1 \geq 0$$

$$(x - y)^2 + t^2 - 1 \geq 0$$
 $0 \leq t \leq 1$  より、

$$(x - y)^2 - (\sqrt{1 - t^2})^2 \geq 0$$

$$(x - y + \sqrt{1 - t^2})(x - y - \sqrt{1 - t^2}) \geq 0$$

よって、  
 $x - y + \sqrt{1 - t^2} \geq 0, x - y - \sqrt{1 - t^2} \geq 0$   
 または、  
 $x - y + \sqrt{1 - t^2} \leq 0, x - y - \sqrt{1 - t^2} \leq 0$



$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , より、図示すると次の図の斜線部分と境界になるので、面積は領域をくっつけた正方形の面積を考えればよいから、  

$$S(t) = (1 - \sqrt{1 - t^2})^2$$

(2) 
$$V = \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 (2 - t^2 - 2\sqrt{1 - t^2}) dt$$
  
 ここで  $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$  は半径 1 の円の面積の  $\frac{1}{4}$  だから  

$$V = \left[ 2t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$$

※立体の概形がわからなくても解くことができるので、切断面を正確に描くことに徹すること。

**【2】** 半径 1 の無限に長い 2 本の円柱の軸が互いに垂直に交わっているとする。  
 このとき、2 本の円柱の共通部分の体積を求めよ。

**【解答】**

$x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1$  を考えて同様にやってもよいし、円柱の式がわからなくても切断面を考えれば解くことが可能。円柱に平行な線を見ると、切断面の 1 辺になるので、切断面は正方形になる。全体像はわからなくてよい。とにかく、 $z$  座標が  $t$  のときの正方形の一辺の長さを求めてしまえばよい。計算は自力で頑張ろう。答え  $\frac{16}{3}$