

**定積分漸化式の演習**

**【例題】**

$a_n = \int_0^1 x^n e^x dx$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定義される数列  $\{a_n\}$  について、次の間に答えよ。  
ただし、 $e$  は自然対数の底である。

- (1)  $a_1, a_2, a_3$  を求めよ。  
 (2)  $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$  となることを示せ。  
 (3)  $\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{e}{n+1}$  を示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。  
 (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$  を求めよ。

(山形大)

**【解答】**

(1) 計算略  $a_1 = 1, a_2 = e - 2, a_3 = -2e + 6$

$$\begin{aligned} (2) a_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \\ &= [e^x \cdot x^{n+1}]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (n+1) \cdot x^n dx \\ &= e - (n+1) \cdot a_n \end{aligned}$$

(3)  $0 < x < 1$  のとき  $1 < e^x < e$  より  
 $x^n < x^n e^x < x^n e$   
 $\int_0^1 x^n dx < \int_0^1 x^n e^x dx < \int_0^1 x^n e dx$

よって

$$\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{e}{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0$  より、はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(4)(2)より

$$n a_n = -a_{n+1} + e - a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = e$$

**【1】**  $\log x$  は  $x$  の自然対数であり、自然対数の底  $e$  の値は、 $2.718\dots$  である。 $f_0(x) = 1$  とし、自然数  $n$  に対して  $f_n(x) = (\log x)^n$  とする。次の間に答えよ。

(1)  $a_0 = \int_1^e f_0(x) dx$  とし、 $a_n = \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx$  とする。自然数  $n$  に対して  $a_{n-1}$  と  $a_n$  の関係式を求めよ。

(2)(1) の関係式を用いて、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}$  を求めよ。

(秋田大医・一部省略)

**【解答】**

$$\begin{aligned} (1) a_n &= \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n dx \\ &= \frac{1}{n!} \left\{ [x \cdot (\log x)^n]_1^e - \int_1^e x \cdot n (\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \right\} \\ &= \frac{1}{n!} (e - n a_{n-1}) \\ &= \frac{e}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} \int_1^e (\log x)^{n-1} dx \\ &= \frac{e}{n!} - a_{n-1} \end{aligned}$$

$$(2) (-1)^n \cdot a_n = e \cdot \frac{(-1)^n}{n!} - (-1)^n \cdot a_{n-1}$$

$$(-1)^n \cdot a_n = e \cdot \frac{(-1)^n}{n!} + (-1)^{n-1} a_{n-1}$$

$$\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} \{ (-1)^n a_n - (-1)^{n-1} a_{n-1} \}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \{ (-1)^n a_n - (-1)^0 a_0 \}$$

ここで

$$a_0 = \int_1^e dx = e - 1$$

より

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \{ (-1)^n a_n - e + 1 \} \text{ なので、}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = -1 + \frac{1}{e}$$

【2】0以上の整数 $n$ に対して、 $x \geq 0$ で定義された関数 $I_n(x)$ を $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$ とおく。

(1)  $n \geq 1$ のとき、 $I_n(x)$ を $I_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

(2)  $n \geq 1$ のとき、等式 $I_0(x) - \frac{I_n(x)}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}$ が成り立つことを示せ。

(3)  $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(x)}{n!} = 0$ が成り立つことを示せ。

(4)  $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$ が成り立つことを示せ。

(熊本大・理)

【解答】

$$\begin{aligned} (1) I_n(x) &= \int_0^x t^n e^{-t} dt \\ &= [-e^{-t} t^n]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) n t^{n-1} dt \\ &= -e^{-x} x^n + n \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt \\ &= -e^{-x} x^n + n I_{n-1}(x) \end{aligned}$$

(2)(1)の式を $n!$ でわると

$$\begin{aligned} \frac{I_n(x)}{n!} &= -e^{-x} \frac{x^n}{n!} + \frac{I_{n-1}(x)}{(n-1)!} \\ \frac{I_n(x)}{n!} - \frac{I_{n-1}(x)}{(n-1)!} &= -e^{-x} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

より(階差数列ととらえて)

$$\frac{I_n(x)}{n!} = \frac{I_0(x)}{0!} + \sum_{k=1}^n (-e^{-x}) \frac{x^k}{k!}$$

よって

$$I_0(x) - \frac{I_n(x)}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}$$

(3)  $0 \leq x \leq 1$ より  $0 \leq t \leq x$ において、 $0 \leq t^n \leq 1$ なので

$$\begin{aligned} 0 \leq t^n e^{-t} &\leq e^{-t} \\ 0 \leq \int_0^x t^n e^{-t} dt &\leq \int_0^x e^{-t} dt \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 0 \leq I_n(x) &\leq -e^{-x} + 1 \\ 0 \leq \frac{I_n(x)}{n!} &\leq \frac{-e^{-x} + 1}{n!} \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$ より

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x} + 1}{n!} = 0$ なので、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(x)}{n!} = 0$$

(4)(2)より

$$I_0(x) e^x - \frac{I_n(x)}{n!} e^x = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

$I_0(x) = -e^{-x} + 1$ より

( $\sum$ の下が $k=0$ になったことに注意して)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (-e^{-x} + 1) e^x - \frac{I_n(x)}{n!} e^x \right\} + 1 \\ &= -1 + e^x - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(x)}{n!} e^x + 1 \\ &= e^x \end{aligned}$$

(3)より)

※この問題の結果から、マクローリン展開( $x=0$ におけるテイラー展開)の式、

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

を導くことができる。 $e^x$ は何回微分しても変わらない関数であるが、右辺も何回微分しても変わらないという性質をもっていることはすぐわかるであろう。