

定積分漸化式の演習

【例題】

$a_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の間に答えよ。
ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) a_1, a_2, a_3 を求めよ。
- (2) $a_{n+1} = e - (n+1)a_n$ となることを示せ。
- (3) $\frac{1}{n+1} < a_n < \frac{e}{n+1}$ を示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ を求めよ。

(山形大)

【1】 $\log x$ は x の自然対数であり、自然対数の底 e の値は、 $2.718\cdots$ である。 $f_0(x) = 1$ とし、自然数 n に対して $f_n(x) = (\log x)^n$ とする。次の間に答えよ。

- (1) $a_0 = \int_1^e f_0(x) dx$ とし、 $a_n = \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx$
とする。自然数 n に対して a_{n-1} と a_n の関係式を求めよ。

- (2) (1) の関係式を用いて、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ を求めよ。

(秋田大医・一部省略)

【2】 0 以上の整数 n に対して、 $x \geq 0$ で定義された関数 $I_n(x)$ を

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt \text{ とおく.}$$

- (1) $n \geq 1$ のとき、 $I_n(x)$ を $I_{n-1}(x)$ を用いて表せ。
- (2) $n \geq 1$ のとき、等式 $I_0(x) - \frac{I_n(x)}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}$ が成り立つことを示せ。
- (3) $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n(x)}{n!} = 0$ が成り立つことを示せ。
- (4) $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x$ が成り立つことを示せ。

(熊本大・理)