

## 合格への10問(文)

【第1回】

$xy$  平面上で放物線  $y = x^2$  上に2点  $A(a, a^2), B(b, b^2)$  ( $a < b$ ) をとり、線分  $AB$  と放物線で囲まれた図形の面積を  $s$  とする。点  $P(t, t^2)$  を放物線上にとり、三角形  $ABP$  の面積を  $S(P)$  とする。 $t$  が  $a < t < b$  の範囲を動くときの  $S(P)$  の最大値を  $S$  とするとき、 $s$  と  $S$  の比を求めよ。

(1998 京都大・文)

$OAB$  において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$  とする。 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, \cos(\angle AOB) = \frac{3}{5}$  とする。このとき、 $\angle AOB$  の二等分線と、 $B$  を中心とする半径  $\sqrt{10}$  の円との交点の、 $O$  を原点とする位置ベクトルを、 $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ。

(2004 京都大・文)

点  $(x, y)$  が  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1, x > 0, y > 0$  を満たしながら動くとき、 $\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{y}$  の最大値を求めよ。

(慶応大)

各辺の長さが  $1, 2, \sqrt{3}$  の三角形の各辺に1点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ。

(1997 東工大)

【第2回】

一般に次の等式が成立する.

$$k(k+1) - (k-1)k = 2k$$

$$k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$$

(1)  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$  を求める公式を上の等式を用いて導け.

(2) 同様な等式を作り,  $\sum_{k=1}^n k^3$  を求める公式を導け.

(2010 鳥取大・後・改)

実数  $t$  に対して,  $[t]$  は  $t$  を超えない最大の整数を表すとする. 正の数  $x$  に対して,

$$m = \left[ \log_{10} \frac{\sqrt[3]{x}}{20} \right], n = \left[ \log_{10} \frac{800}{x} \right] \text{ とおく. このとき, } 3m + n \text{ のとりうる値を求めよ.}$$

(2004 早稲田大・国際教養)

1 辺の長さ 1 の正四面体  $OABC$  において, 辺  $OC$  の中点を  $M$ , 辺  $AB$  の中点を  $N$  とする.  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$  とするとき, 以下の間に答えよ.

(1) 三角形  $ABM$  の外心を  $Q$  とする.  $\vec{OQ}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いて表せ.

(2) 2 直線  $OA$  と  $OB$  に平行で点  $C$  を通る平面を  $\alpha$  とする. 点  $A, B, M$  を通り, 平面  $\alpha$  上に中心をもつ球面を  $S$  とする.  $S$  の中心を  $R$  とするとき,  $\vec{OR}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いて表せ.

(2011 岐阜大・後・改)

【第3回 A クラス】

$a, b$  は実数で,  $b \neq 0$  とする.  $xy$  平面に原点  $O(0, 0)$  および 2 点  $P(1, 0), Q(a, b)$  をとる.

(1)  $OPQ$  が鋭角三角形となるための  $a, b$  の条件を不等式で表し, 点  $(a, b)$  の範囲を  $ab$  平面上に図示せよ.

(2)  $m, n$  を整数とする.  $a, b$  が (1) で求めた条件をみたすとき, 不等式

$$(m+na)^2 - (m+na) + n^2b^2 > 0$$

が成り立つことを示せ.

(1998 東大・文)

(1) 曲線  $y = x^3$  と直線  $y = 3x + a$  が異なる 3 点で交わるような  $a$  の範囲を求めよ.

(2)  $a$  が (1) の範囲を動くとき, 3 つの交点を  $A, B, C$  とし, 点  $(a, 4a)$  を  $D$  とする. 3 つの線分の長さの積  $DA \cdot DB \cdot DC$  の最大値を求めよ.

(1999 一橋大)

正の数  $k, l (k \neq l)$  に対して数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  を次のように定義する.

$$a_1 = k, b_1 = l$$

$n \geq 1$  について

$$a_{n+1} = \begin{cases} b_n & (b_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ a_n & (b_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} a_n \text{ を } b_n \text{ で割った余り} & (b_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ b_n & (b_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1)  $k = 1998, l = 185$  について,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  をそれぞれ第 5 項まで計算せよ.

(2) 任意の  $k, l, n$  について  $b_n = b_{n+1}$  (等号は  $b_n = 0$  のときに限る) を示せ.

(3) 任意の  $k, l$  について  $b_n = 0$  となる  $n$  が存在することを示せ.

(4)  $b_n = 0$  となる  $n$  について  $a_n$  が  $k$  と  $l$  の最大公約数になっていることを示せ.

(1998 お茶の水女子大)

### 【第 3 回 B クラス】

ABC の外心 O から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P, Q, R とするとき,  $\vec{OP} + 2\vec{OQ} + 3\vec{OR} = \vec{0}$  が成立しているとする.

(1)  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  の関係式を求めよ.

(2)  $\angle A$  の大きさを求めよ.

(1992 京都大)

(3) 直線  $x + y = 2$  と円  $x^2 + y^2 = 5$  の交点の座標を求めよ.

(4) 2 つの実数  $a, b$  のうち, 大きい方を  $\max\{a, b\}$  で表す. ( $a = b$  のときは,  $\max\{a, b\} = a$  である.) 次の不等式を満たす点  $(x, y)$  の存在する範囲を図示せよ.

$$1 \leq \max\{4x + 4y - 3, x^2 + y^2\} \leq 5$$

(1992 京大・文)

3 組の対辺が互いに垂直であるような四面体  $V$  がある. このとき,  $V$  の各辺の中点は,  $V$  の重心を中心とするある 1 つの球面上にあることを示せ.

(1991 京都大・文理)