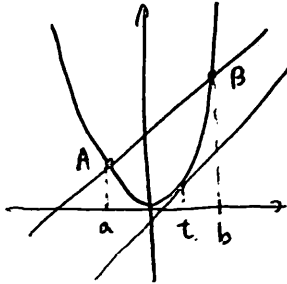


$xy$  平面上で放物線  $y = x^2$  上に 2 点  $A(a, a^2), B(b, b^2)$  ( $a < b$ ) をとり、線分  $AB$  と放物線で囲まれた図形の面積を  $s$  とする。点  $P(t, t^2)$  を放物線上にとり、三角形  $ABP$  の面積を  $S(P)$  とする。 $t$  が  $a < t < b$  の範囲を動くときの  $S(P)$  の最大値を  $S$  とするとき、 $s$  と  $S$  の比を求めよ。

(1998 京都大・文)



$$s = \int_a^b -(x-a)(x-b) dx = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

$S(P)$  の最大値  $S$  は、図のように、 $t$  における接線と、直線  $AB$  が平行になるときである。

$y' = 2x$  より、 $x = t$  とき  $y'$  の値は  $2t$ 。

直線  $AB$  の傾きは  $a \neq b$  より

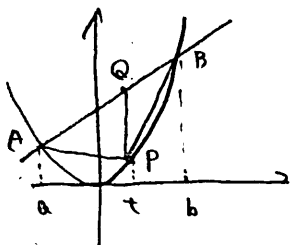
$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b$$

であるから、

$$a + b = 2t$$

よって、 $a$  と  $b$  のとき  $P$  は  $(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$

である。



$x = t$  と直線  $AB$  の交点  $Q$  とする。

$Q$  は  $AB$  の中点である。

$$Q\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

とすることができる。

$$S = \frac{1}{2} \times PQ \times (b-a)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right) \cdot (b-a)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4} \right) \cdot (b-a)$$

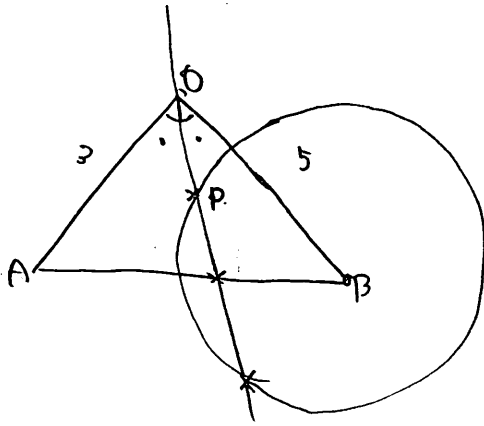
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2-2ab+b^2}{4} \cdot (b-a)$$

$$= \frac{1}{8} (b-a)^3$$

$$\therefore s : S = \frac{1}{6}(b-a)^3 : \frac{1}{8}(b-a)^3 \\ = 4 : 3$$

$\triangle OAB$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする。 $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\cos(\angle AOB) = \frac{3}{5}$ とする。このとき、 $\angle AOB$ の二等分線と、 $B$ を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の、 $O$ を原点とする位置ベクトルを、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2004 京都大・文)



$\angle AOB = \theta$  = 二等分線と  $AB$  の交点  
 $P$  とする。  $AP : PB = 3 : 5$ 。  
 であるから、本問の交点を  $P$  とする。

$$\overrightarrow{OP} = k(5\vec{a} + 3\vec{b}) \quad (k \text{ は実数})$$

と仮定。  $|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{10}$  より

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = 10$$

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}|^2 = 10$$

$$|5k\vec{a} + (3k-1)\vec{b}|^2 = 10$$

$$25k^2|\vec{a}|^2 + 10k(3k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (3k-1)^2|\vec{b}|^2 = 10$$

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 9 \text{ より}$$

$$25 \cdot 9k^2 + 10k(3k-1) \cdot 9 + (3k-1)^2 \cdot 25 = 10$$

$$45k^2 + 54k^2 - 18k + 45k^2 - 30k + 5 = 2$$

$$144k^2 - 48k + 3 = 0$$

$$48k^2 - 16k + 1 = 0$$

$$(4k-1)(12k-1) = 0$$

$$k = \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$$

従って、  $\frac{1}{4}(5\vec{a} + 3\vec{b}), \frac{1}{12}(5\vec{a} + 3\vec{b})$

※  $\overrightarrow{OP} = k \left( \frac{\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{5} \right)$

と仮定してもよい。

( $\vec{a}, \vec{b}$  を単位ベクトルにすると考えれば)

$$\frac{48}{12} = \frac{4}{1} = \frac{48}{12}$$

点  $(x, y)$  が  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1, x > 0, y > 0$  を満たしながら動くとき,  $\log_2 x + \log_2 \frac{1}{y}$  の最大値を求めよ.

(慶応大)

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 \frac{1}{y} &= \log_2 x + \log_2 y^{-1} \\ &= \log_2 x + \log_2 y \\ &= \log_2 xy. \end{aligned}$$

$$x > 0, y > 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad (*)$$

$$0 < x < 2, \quad 0 < y < \sqrt{5}$$

である. 相加相乗平均の式より

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4} \cdot \frac{y^2}{5}} = \frac{xy}{\sqrt{5}}$$

$$*) \quad \sqrt{5} \geq xy \quad \text{である.}$$

$$\text{等号は, } \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{5} = \frac{1}{2} \quad **)$$

$$x = \sqrt{2}, \quad y = \sqrt{\frac{5}{2}} \quad \text{である.}$$

したがって,  $xy$  の最大値は  $\sqrt{5}$ .

よって,

$$\log_2 x + \log_2 \frac{1}{y} = \log_2 xy \quad \text{の最大値は}$$

$$\log_2 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log_2 5$$

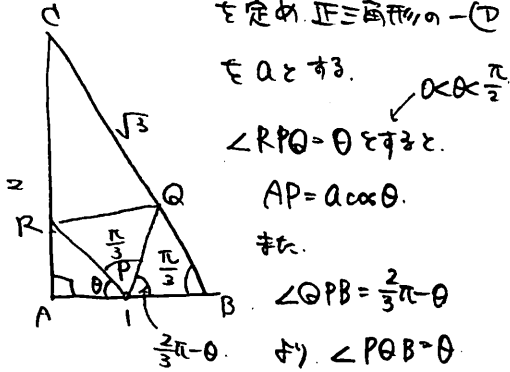
$$\textcircled{B11} \quad : \frac{x}{2} = \cos \theta, \quad \frac{y}{\sqrt{5}} = \sin \theta \quad \text{と置くことができる.}$$

各辺の長さが 1, 2,  $\sqrt{3}$  の三角形の各辺に 1 点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ。

(1997 東工大)



長さが 1, 2,  $\sqrt{3}$  の三角形は直角三角形である。図 9F3 に A, B, C, P, Q, R を定め、正三角形の一辺を a とする。



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\angle RPQ = \theta$  とする。

$$AP = a \cos \theta$$

また、

$$\angle QPB = \frac{2}{3}\pi - \theta$$

$$\angle PQR = \frac{\pi}{3}$$

したがって、 $\triangle PQR$  に正弦定理を用いると

$$\frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1 - a \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$a \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - a \cos \theta)$$

$$(2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) a = \sqrt{3}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}$$

$\triangle PQR$  の面積  $N$  は

$$N = \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{(2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)^2}$$

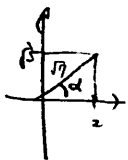
よって、 $|2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta|$  が最大になるとき、

$N$  が最小値になる。

$$2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{7} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで } \alpha \text{ は } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \text{ } \end{array} \right)$$

よって、 $|2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta|$  の最大値は  $\sqrt{7}$



よって、 $N$  の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{3}{28} \sqrt{3}$$

(5) 座標を  $x, y$  とおくと、若干めんどう。

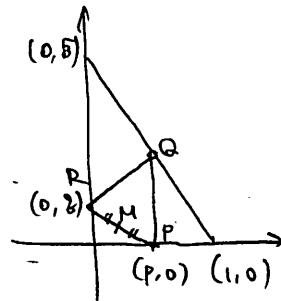
図 9F3 に中点を  $M$  とする

$$M \left( \frac{p}{2}, \frac{q}{2} \right)$$

$$MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{p^2 + q^2}$$

$\vec{MQ}$  は  $\vec{PR}$  と垂直だから

$$\vec{MQ} \parallel (q, p) \text{ である}$$



$$\vec{MQ} = MQ \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} (q, p)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (q, p)$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} \vec{OQ} &= \vec{OM} + \vec{MQ} \\ &= \left( \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} q, \frac{q}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} p \right) \end{aligned}$$

よって、 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$  上にありかつ

$$\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} p = -\sqrt{3} \left( \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} q \right) + \sqrt{3}$$

$$2q + \sqrt{3}p = \sqrt{3}$$

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - p)$$

$$\text{よって、} N = \frac{1}{2} PR^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (p^2 + q^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( p^2 + \frac{3}{4} (1 - p)^2 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{7}{4} p^2 - \frac{3}{2} p + \frac{3}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left\{ \frac{7}{4} \left( p - \frac{3}{7} \right)^2 - \frac{9}{28} + \frac{3}{4} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{7}{4} \left( p - \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{3}{7} \right\}$$

$$p = \frac{3}{7}, q = \frac{2\sqrt{3}}{7} \text{ のとき、最小値 } \frac{3\sqrt{3}}{28}$$

一般に次の等式が成立する.

$$k(k+1) - (k-1)k = 2k$$

$$k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) = 3k(k+1)$$

(1)  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$  を求める公式を上の等式を用いて導け.

(2) 同様な等式を作り,  $\sum_{k=1}^n k^3$  を求める公式を導け.

(2010 鳥取大・後・改)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \cancel{1 \cdot 2} - 0 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \\
 & \cancel{2 \cdot 3} - \cancel{1 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \\
 & \cancel{3 \cdot 4} - \cancel{2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 +) & \frac{n \cdot (n+1) - \cancel{(n-1) \cdot n} = 2 \cdot n}{n \cdot (n+1)} = 2 \cdot (1+2+\dots+n)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\begin{aligned}
 \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} - 0 \cdot 1 \cdot 2 &= 3 \cdot 1 \cdot 2 \\
 \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4} - \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} &= 3 \cdot 2 \cdot 3 \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +) & \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) - \cancel{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)} = 3n \cdot (n+1)}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = 3 \sum_{k=1}^n k(k+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) - \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2} n(n+1) \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+4-3) \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2) \\
 &= 4k(k+1)(k+2)
 \end{aligned}$$

たけなりのこと

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\cancel{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$\vdots$

$=$

$$+ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) - \cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)} = 4n(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = 4 \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$$

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) = 4 \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\
 &= \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + n(n+1) \\
 &= \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{1}{2} n(n+1)(2n+3)
 \end{aligned}$$

よ)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{2} n(n+1)(2n+3) \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2+5n+6-4n-6) \\
 &= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2+n) \\
 &= \frac{1}{4} n^2(n+1)^2
 \end{aligned}$$

④ 1966. 一橋 a.

"  $\sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^k j \right) \right\}$  を因数分解せよ."

この問題は  $1+2+\dots+n$  と  $1+2+\dots+n$  と  $1+2+\dots+n$

$$\left( \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(n+3) \right)$$

実数  $t$  に対して、 $[t]$  は  $t$  を超えない最大の整数を表すとする。正の数  $x$  に対して、  
 $m = \left\lfloor \log_{10} \frac{\sqrt[3]{x}}{20} \right\rfloor$ ,  $n = \left\lfloor \log_{10} \frac{800}{x} \right\rfloor$  とおく。このとき、 $3m+n$  のとりうる値を求めよ。

(2004 早稲田大・国際教養)

$$\begin{aligned} m &= \left\lfloor \log_{10} \frac{\sqrt[3]{x}}{20} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{1}{3} \log_{10} x - \log_{10} 20 \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{1}{3} \log_{10} x - \log_{10} 2 - 1 \right\rfloor. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \left\lfloor \log_{10} \frac{800}{x} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \log_{10} 800 - \log_{10} x \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 3 \log_{10} 2 + 2 - \log_{10} x \right\rfloor. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{3} (\log_{10} x - 3 \log_{10} 2) = k + \alpha, \dots *$$

(ただし  $k$  は整数、 $\alpha$  は小数部分)

とすると

$$m = \lfloor k + \alpha - 1 \rfloor = k - 1.$$

$$\begin{aligned} n &= \lfloor -(\log_{10} x - 3 \log_{10} 2) + 2 \rfloor \\ &= \lfloor -3k - 3\alpha + 2 \rfloor \\ &= -3k + 2 + \lfloor -3\alpha \rfloor. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3m + n &= 3k - 3 - 3k + 2 + \lfloor -3\alpha \rfloor \\ &= -1 + \lfloor -3\alpha \rfloor. \end{aligned}$$

(\*)  $\alpha$  を  $0 \leq \alpha < 1$  とすると、 $k + \alpha$  は必ず整数である。つまり、 $\alpha$  は  $0 \leq \alpha < 1$  の範囲で、 $k + \alpha$  が整数となるような値を取る。

$$-3 < -3\alpha \leq 0 \text{ かつ}$$

$$\lfloor -3\alpha \rfloor = -3, -2, -1, 0.$$

とある  $\alpha$  が存在する。よって

$$3m + n = -4, -3, -2, -1.$$

\* 誤りはある。

$$\lfloor -3\alpha \rfloor \neq -\lfloor 3\alpha \rfloor$$

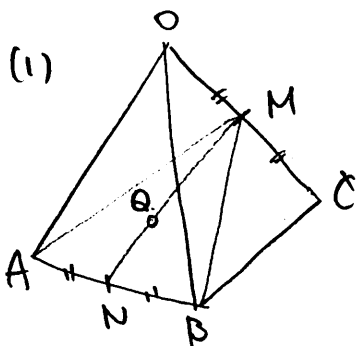
だから、こうしただけではダメ。

1 辺の長さ 1 の正四面体  $OABC$  において、辺  $OC$  の中点を  $M$ 、辺  $AB$  の中点を  $N$  とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$  とするとき、以下の間に答えよ。

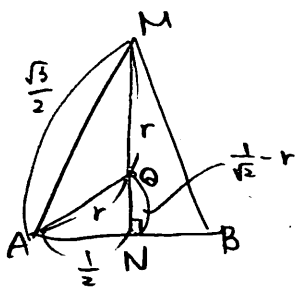
(1) 三角形  $ABM$  の外心を  $Q$  とする。 $\vec{OQ}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて表せ。

(2) 2 直線  $OA$  と  $OB$  に平行で点  $C$  を通る平面を  $\alpha$  とする。点  $A, B, M$  を通り、平面  $\alpha$  上に中心をもつ球面を  $S$  とする。 $S$  の中心を  $R$  とするとき、 $\vec{OR}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて表せ。

(2011 岐阜大・後・改)



$AM = BM$ ,  $AN = NB$   
 ためし  $MN$  は線分  $AB$  の垂直二等分線。  
 $Q$  は線分  $MN$  上にあり、外接円の半径を  $r$  とする。



$MN = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 ためし左図で  $\triangle QAN$  についで、三平方の定理を用いる。

$$r^2 = \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - r)^2$$

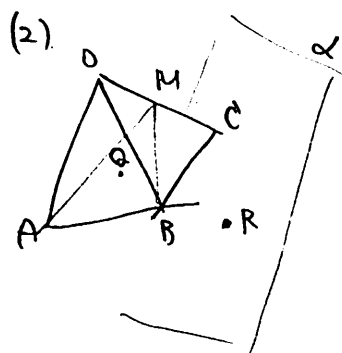
$$r = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

ためし  $QM = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ ,  $QN = \frac{\sqrt{2}}{8}$  ためし  
 $QM : QN = 3 : 1$  ためし

$$\vec{OQ} = \frac{3}{4} \vec{ON} + \frac{1}{4} \vec{OM}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \vec{c}$$

$$= \frac{3}{8} \vec{a} + \frac{3}{8} \vec{b} + \frac{1}{8} \vec{c}$$



$\alpha$  は  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  と平行ためし  
 $s, t$  を実数として  
 $\vec{OR} = s\vec{a} + t\vec{b} + \vec{c}$  ためし ... ①

ためし  $Q$  は球上の点  $A, B, M$  からなる三角形の外心ためし。 $\vec{QR}$  は  $\alpha$  に垂直。  
 ためし  $\vec{c}$  と  $\vec{AM}$  は垂直、 $\vec{c}$  と  $\vec{BM}$  は垂直ためし。  
 $\vec{c}$  は  $\alpha$  と垂直ためし。

$$\vec{c} \parallel \vec{QR} \text{ ためし}$$

ためし  $\vec{OR} = \vec{OQ} + k\vec{c}$  ( $k$  は実数) とかけ。

$$\vec{OR} = \frac{3}{8} \vec{a} + \frac{3}{8} \vec{b} + (\frac{1}{8} + k) \vec{c} \quad \dots ②$$

$\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  は一次独立ためし。①、②は同じベクトルをあらわすためし

$$s = \frac{3}{8}, t = \frac{3}{8}, \frac{1}{8} + k = 1$$

$$\therefore \vec{OR} = \frac{3}{8} \vec{a} + \frac{3}{8} \vec{b} + \vec{c}$$

$a, b$  は実数で,  $b \neq 0$  とする.  $xy$  平面に原点  $O(0,0)$  および 2 点  $P(1,0), Q(a,b)$  をとる.

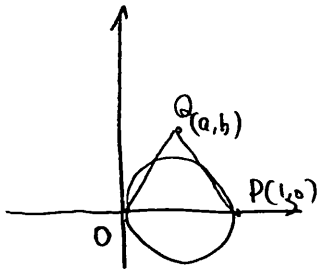
(1)  $\triangle OPQ$  が鋭角三角形となるための  $a, b$  の条件を不等式で表し, 点  $(a,b)$  の範囲を  $ab$  平面上に図示せよ.

(2)  $m, n$  を整数とする.  $a, b$  が (1) で求めた条件をみたすとき, 不等式

$$(m+na)^2 - (m+na) + n^2b^2 \geq 0$$

が成り立つことを示せ.

(1998 東大・文)



$\angle OQP$  が鋭角であるためには, 上図の如くに,  $OP$  を直径とする円の外側に  $(a,b)$  があればよい. 円の方程式は

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

だから,

$$(a - \frac{1}{2})^2 + b^2 > \frac{1}{4}$$

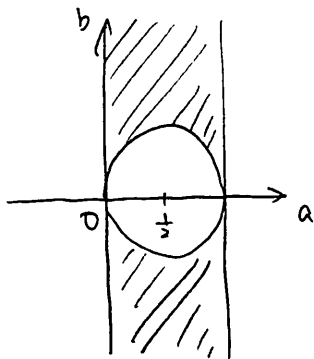
$$\therefore a^2 - a + b^2 > 0.$$

$\angle QOP$  が鋭角であるためには  $a > 0$ .

$\angle QPO$  が鋭角であるためには  $a < 1$

以上より  $a^2 - a + b^2 > 0, 0 < a < 1$ .

よって 下図の斜線部分, 境界は含まぬ



(2) ( $m+na$  を 1 文字で置きかえても  
"  $m, n$  が整数 " という条件を生かすに  
  $a$  に  $m$  を代入. まとめてみる

(1) より

$$(m+na)^2 - (m+na) + n^2b^2$$

$$\geq (m+na)^2 - (m+na) + n^2(a-a^2) \quad (\text{等号は } n=0 \text{ の時})$$

$$= (2mn + n^2 - n)a + m^2 - m$$

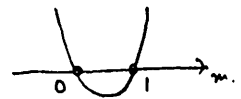
$$f(a) = (2mn + n^2 - n)a + m^2 - m$$

とすると, これは  $a$  に  $m$  の 1 次関数?

$$f(0) = m^2 - m$$

$$= m(m-1) \geq 0$$

( $\because m$  は整数)



$$f(1) = 2mn + n^2 - n + m^2 - m$$

$$= m^2 + (2n-1)m + n^2 - n$$

$$= (m+n-1)(m+n)$$

$m+n = k$  とおくと,  $k$  は整数?

$f(1) = k(k-1)$  となり,  $f(0)$  のときと同様に

$$f(1) \geq 0.$$

よって,  $0 < a < 1$  に対し  $f(a) \geq 0$

が成り立つ.

以上より,

$$(m+na)^2 - (m+na) + n^2b^2 \geq 0.$$

が成り立つ.



(1) 曲線  $y = x^3$  と直線  $y = 3x + a$  が異なる3点で交わるような  $a$  の範囲を求めよ.

(2)  $a$  が (1) の範囲を動くとき、3つの交点を  $A, B, C$  とし、点  $(a, 4a)$  を  $D$  とする。3つの線分の長さの積  $DA \cdot DB \cdot DC$  の最大値を求めよ.

(1999一橋大)

(1)  $y$  を消去して

$$x^3 - 3x = a.$$

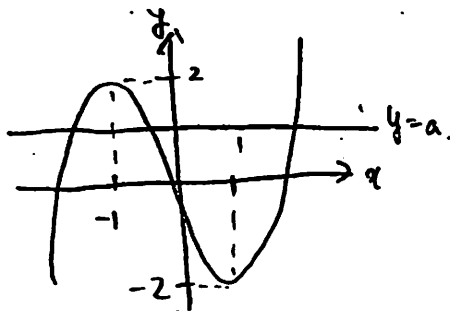
$$f(x) = x^3 - 3x \text{ と } a \text{ と } \varepsilon$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$$f'(x) = 0 \text{ と } \varepsilon < \varepsilon < \varepsilon \text{ と } x = 1, -1.$$

お. 増減表は

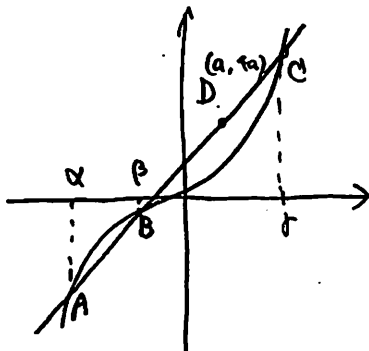
$x$	...	-1	...	1	...
$f(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	↗	2	↘	-2	↗



$y = f(x)$  と  $y = a$  が異なる3点で交わり、その  $a$  の範囲を求めよ。

$$f(x) = a \text{ と } -2 < a < 2$$

(2)  $D$  は  $y = 3x + a$  上にある。



$A, B, C$  の  $x$  座標を  $\alpha, \beta, \gamma$  とし

$\alpha, \beta, \gamma$  とする。 (ただし  $\alpha < \beta < \gamma$ )

$$A(\alpha, 3\alpha + a), B(\beta, 3\beta + a), C(\gamma, 3\gamma + a)$$

よ. 1.

$$DA = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (3\alpha + a - 4a)^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha - a)^2 + 9(\alpha - a)^2}$$

$$= \sqrt{10} |\alpha - a|$$

$$DB = \sqrt{10} |\beta - a|, DC = \sqrt{10} |\gamma - a|$$

よ. 2.

$$DA \cdot DB \cdot DC = 10\sqrt{10} |\alpha - a| \cdot |\beta - a| \cdot |\gamma - a|$$

$$= 10\sqrt{10} |(\alpha - a)(\beta - a)(\gamma - a)|$$

よ. 3.  $\alpha, \beta, \gamma$  は  $x^3 - 3x - a = 0$  の解である。

$$x^3 - 3x - a = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

$$よ. 4. a^3 - 3a - a = (a - \alpha)(a - \beta)(a - \gamma)$$

$$よ. 5. DA \cdot DB \cdot DC = 10\sqrt{10} |a^3 - 4a|$$

$$g(a) = a^3 - 4a \text{ と } \varepsilon < \varepsilon \text{ と } g'(a) = 3a^2 - 4$$

$$g'(a) = 0 \text{ と } \varepsilon < \varepsilon \text{ と } a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$a$	-2	...	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	...	2
$g(a)$		+	0	-	0	+	
$g'(a)$	0	↗	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$	↗	0

$$よ. 6. |g(a)| \text{ の最大値は } a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ と } \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

よ. 7. 最大値は

$$10\sqrt{10} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{9} = \frac{160\sqrt{30}}{9}$$

正の数  $k, l (k \geq l)$  に対して数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  を次のように定義する.

$$a_1 = k, b_1 = l$$

$n \geq 1$  について

$$a_{n+1} = \begin{cases} b_n & (b_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ a_n & (b_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} a_n \text{ を } b_n \text{ で割った余り} & (b_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ b_n & (b_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1)  $k = 1998, l = 185$  について,  $\{a_n\}, \{b_n\}$  をそれぞれ第 5 項まで計算せよ.

(2) 任意の  $k, l, n$  について  $b_n \geq b_{n+1}$  (等号は  $b_n = 0$  のときに限る) を示せ.

(3) 任意の  $k, l$  について  $b_n = 0$  となる  $n$  が存在することを示せ.

(4)  $b_n = 0$  となる  $n$  について  $a_n$  が  $k$  と  $l$  の最大公約数になっていることを示せ.

(1998 お茶の水女子大)

(1)  $k = 1998, l = 185$  をとる

$$a_2 = b_1 = 185$$

$$1998 = 185 \times 10 + 148 \text{ かつ}$$

$$b_2 = 148$$

$$a_3 = b_2 = 148$$

$$185 = 148 \times 1 + 37 \text{ かつ}$$

$$b_3 = 37$$

$$a_4 = b_3 = 37$$

$$148 = 37 \times 4 + 0 \text{ かつ}$$

$$b_4 = 0$$

$$a_5 = a_4 = 37, \quad b_5 = b_4 = 0.$$

(2)  $b_n \neq 0$  とする.

$b_{n+1}$  は  $a_n$  を  $b_n$  で割った余り  
だから

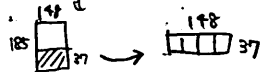
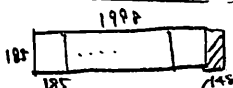
$$0 \leq b_{n+1} < b_n$$

と成り立つ

(3)  $b_{n+1} < b_n$  かつ、必ず減少してゆく

数がある。また、 $b_n$  は 0 以上の  
整数であるから、 $b_n$  は常に減りつづける  
最終的には必ず、最小値 0 と成る。

(余)



と考えることは  
できる。

(4) (2) と同様にして

$$a_n = b_n \cdot q_n + b_{n+1}$$

と成り立つ。  $b_{n+1} = a_n - b_n \cdot q_n$  かつ

$b_n$  と  $a_n$  の公約数は  $b_{n+1}$  の約数となるから  
よって  $b_n$  と  $b_{n+1}$  の公約数である。

逆に  $b_n$  と  $b_{n+1}$  の公約数は  $a_n$  と  $b_n$  の公約数  
だから、公約数の集合は一致するから

$a_n$  と  $b_n$  の最大公約数を  $(a_n, b_n)$  とおくと

$$(a_n, b_n) = (b_n, b_{n+1})$$

$$b_n \neq 0 \text{ かつ } a_{n+1} = b_n \text{ かつ}$$

$$(a_n, a_{n+1}) = (a_{n+1}, a_{n+2})$$

かつ、ある自然数  $N$  に対して、(3) かつ  $b_N = 0$  と成る  
ものが存在し

$$(k, l) = (a_1, a_2) = \dots = (a_N, b_N) = a_N$$

( $0 = 0 \times n$  かつ、任意の自然数  $n$  の約数と成る)

(余)

$$1998 = 185 \times 10 + 148$$

$$(1998, 185) = (185, 148)$$

$$185 = 148 \times 1 + 37$$

$$(185, 148) = (148, 37)$$

$$148 = 37 \times 4 + 0$$

$$(148, 37) = (37, 0)$$

$$= 37$$

よって成り立つ  $a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = d$  と成る

$$ax + by = d$$

と成る  $x, y \in \mathbb{Z}$  が存在することを示す、両辺を  $d$  で割ると

$$a, b \text{ の } \text{gcd} = d \text{ かつ}$$

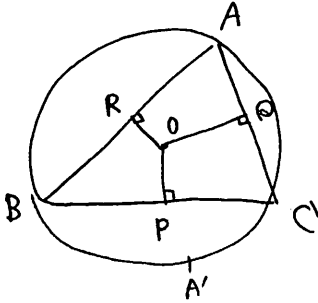
$$ax + by = 1$$

と成る  $x, y \in \mathbb{Z}$  が存在することを示す。

$\triangle ABC$  の外心  $O$  から直線  $BC, CA, AB$  に下ろした垂線の足をそれぞれ  $P, Q, R$  とするとき、 $\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{OR} = \vec{0}$  が成立しているとする。

- (1)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  の関係式を求めよ。  
 (2)  $\angle A$  の大きさを求めよ。

(1992 京都大)



また、 $\overrightarrow{OA'} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{OC}$  より。

$O, A, B, C$  の位置は左図の通り。A' の位置は左図の通り。円周角の定理から。

$\angle A = 45^\circ$

- (1)  $OP, OQ, OR$  は  $BC, CA, AB$  の垂線 = 等分点だから、 $\overrightarrow{OA'} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とすると

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}),$

$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

$\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OQ} + 3\overrightarrow{OR} = \vec{0}$  に  $\lambda$  をかけると

$\vec{b} + \vec{c} + 2(\vec{c} + \vec{a}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}$

$5\vec{a} + 4\vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$

$\therefore 5\overrightarrow{OA'} + 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

- (2) (1) の式から、ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  の係数を比較して、 $\angle BOC$  の値を求めると、 $\angle A$  の値が求まる。

$5\overrightarrow{OA'} = -4\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}$

$|5\overrightarrow{OA'}| = |-4\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}|$

$25|\overrightarrow{OA'}|^2 = 16|\overrightarrow{OB}|^2 + 24\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 9|\overrightarrow{OC}|^2$

$|\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$  より

$25 = 16 + 24 \cdot \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OC}|} + 9$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

$\therefore \angle BOC = 90^\circ$

(1) 直線  $x+y=2$  と円  $x^2+y^2=5$  の交点の座標を求めよ.

(2) 2つの実数  $a, b$  のうち、大きい方を  $\max\{a, b\}$  で表す. ( $a=b$  のときは、 $\max\{a, b\} = a$  である.) 次の不等式を満たす点  $(x, y)$  の存在する範囲を図示せよ.

$$1 \leq \max\{4x+4y-3, x^2+y^2\} \leq 5$$

(1992 京大・文)

(1)  $y$  を消去して.

$$x^2 + (2-x)^2 = 5$$

$$2x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

よって  $\left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}, \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right), \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$

(2) i)  $4x+4y-3 \leq x^2+y^2$

すなわち

$$5 \leq (x-2)^2 + (y-2)^2$$

かつ

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 5$$

ii)  $4x+4y-3 \geq x^2+y^2$

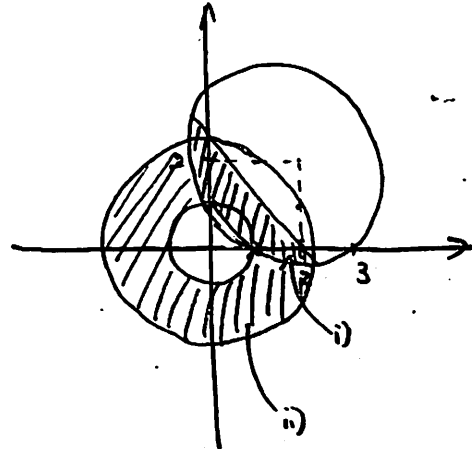
すなわち  $5 \geq (x-2)^2 + (y-2)^2$

かつ

$$1 \leq 4x+4y-3 \leq 5$$

$$1 \leq x+y \leq 2$$

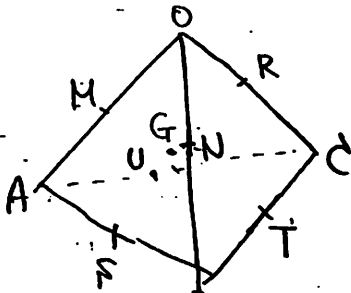
↑↑↑↑↑



図の斜線部分. 境界含む.

3組の対辺が互いに垂直であるような四面体Vがある。このとき、Vの各辺の中点は、Vの重心を中心とするある1つの球面上にあることを示せ。

(1991 京都大・文理)



頂点を  $O, A, B, C$ ,  
各辺の中点を図の如くに  $M, N, R, S, T, U$ ,  
重心を  $G$  とする。また  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,

$\vec{OC} = \vec{c}$  とする。

$$\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

また  $\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ ,  $\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$ ,

$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$  かつ

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = k$

この式の値を  $k$  とおく。

$$\begin{aligned} |\vec{GM}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &\quad + 2\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k) \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$|\vec{GN}|^2$ ,  $|\vec{GR}|^2$  も同様に成り立つ

$$|\vec{GM}| = |\vec{GN}| = |\vec{GR}|$$

$$\begin{aligned} \text{また } |\vec{GS}|^2 &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &\quad - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k) \dots \textcircled{2}$$

$|\vec{GT}|^2$ ,  $|\vec{GU}|^2$  も同様に成り立つ

$$|\vec{GS}| = |\vec{GT}| = |\vec{GU}|$$

また ①②の計算結果が同じだから

$$|\vec{GM}| = |\vec{GN}| = |\vec{GR}| = |\vec{GS}| = |\vec{GT}| = |\vec{GU}|$$

よって 各辺の中点は  $G$  を中心とする1つの球面上