

合格への10問(理)

【第1回】

n を2以上の自然数とする. 平面上の OA_1A_2 は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$, $OA_1 = 1$, $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ をみたとする. A_2 から OA_1 へ垂線をおろし, 交点を A_3 とする. A_3 から OA_2 へ垂線をおろし, 交点を A_4 とする. 以下同様に, $k = 4, 5, \dots$ について, A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし, 交点を A_{k+1} とし, 順番に A_5, A_6, \dots を定める. $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくと, 以下の問に答えよ.

(1) $k = 1, 2, \dots$ のとき, \vec{h}_k と \vec{h}_{k+1} の内積 $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ を n と k で表せ.

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ とおくと, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

(2008 東北大・理・一部省略)

x 軸上の点 $A(s, 0)$ ($0 < s < 1$) と y 軸上の点 $B(0, t)$ ($0 < t < 1$) を両端として動く長さ1の線分 AB があるとき,

(1) 線分 AB と直線 $x = x_0$ ($0 < x_0 < s$) との交点の y 座標を s, x_0 で表せ.

(2) 線分 AB が通過する領域を不等式で表せ.

(滋賀医大)

3組の対辺が互いに垂直であるような四面体 V がある. このとき, V の各辺の中点は, V の重心を中心とするある1つの球面上にあることを示せ.

(1991 京都大・文理)

複素数 α に対してその共役複素数を $\bar{\alpha}$ であらわす. α を実数ではない複素数とする. 複素平面内の円 C が $1, -1, \alpha$ を通るならば, C は $-\frac{1}{\bar{\alpha}}$ も通ることを示せ.

(2004 京都大・理系)

【第2回】

n を正の整数とする.

(1) $x > 0$ のとき, $e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt$ の値を求めよ.

(1989 大阪女子大)

各辺の長さが $1, 2, \sqrt{3}$ の三角形の各辺に1点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ.

(1997 東工大)

xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を l とする.

- (1) l 上の点 $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$ を通り, l と垂直な平面が, xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ.
- (2) 不等式 $0 < y < x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする. l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

(2009 東工大)

【第3回】

楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ の焦点のうち, x 座標が正であるものを F とし, F を通る直線と楕円の交点を A, B とする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) ベクトル \overrightarrow{FA} が x 軸の正の向きとなす角を θ とするとき, $FA = \frac{16}{5 + 3 \cos \theta}$ となることを示せ.
- (2) $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{5}{8}$ であることを示せ.

(1991 愛知教育大)

【追加問題】

O を原点とする. 楕円 C を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) とする. 楕円 C の周上を 2 点 P, Q が $OP \perp OQ$ を満たしながら動くとき, $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$ が一定であることを示せ.

$0 < x < 1$ に対して, $a + bx < \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} < a + cx$ が常に成り立っている. ただし, e は自然対数の底である.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) b の最大値と c の最小値をそれぞれ求めよ.

(2009 一橋大)

$a_1 = \frac{1}{2}$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (3) 各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく. $n > 1$ のとき, $b_n > 2n$ となることを示せ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めよ.
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ を求めよ.

(2006 東大・理)