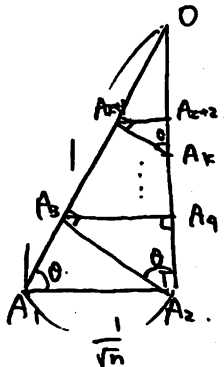


n を 2 以上の自然数とする. 平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$, $OA_1 = 1$, $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ をみたすとする. A_2 から OA_1 へ垂線をおろし, 交点を A_3 とする. A_3 から OA_2 へ垂線をおろし, 交点を A_4 とする. 以下同様に, $k = 4, 5, \dots$ について, A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし, 交点を A_{k+1} とし, 順番に A_5, A_6, \dots を定める. $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくと, 以下の間に答えよ.

(1) $k = 1, 2, \dots$ のとき, \vec{h}_k と \vec{h}_{k+1} の内積 $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ を n と k で表せ.

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ とおくと, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

(2008 東北大・理・一部省略)



∠OA₁A₂ = θ とおくと

∠A₁A₂A₃ = θ

と仮定する.

A_kA_{k+1} \cdot \sin\theta = A_{k+1}A_{k+2}}

と仮定する.

$$\begin{aligned} (\text{1. } \theta \text{ のとき}) \quad A_k A_{k+1} &= (\sin\theta)^{k-1} \cdot A_1 A_2 \\ &= \frac{(\sin\theta)^{k-1}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\vec{h}_k = \overrightarrow{A_k A_{k+1}} \quad \text{と} \quad \vec{h}_{k+1} = \overrightarrow{A_{k+1} A_{k+2}}$$

∠A_kA_{k+1}A_{k+2} は $\pi - (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\pi}{2} + \theta$ と仮定する.}}

$$\begin{aligned} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} &= |\overrightarrow{A_k A_{k+1}}| \cdot |\overrightarrow{A_{k+1} A_{k+2}}| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ &= \frac{(\sin\theta)^{k-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(\sin\theta)^k}{\sqrt{n}} \cdot (-\sin\theta) \\ &= -\frac{1}{n} \cdot (\sin\theta)^{2k} \end{aligned}$$

∴ $\triangle OA_1A_2$ を仮定する.

$$OA_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \quad \text{と仮定する.}$$

$$\sin\theta = \frac{OA_2}{OA_1} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

$$\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} = -\frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

(2) 数列 $\{\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}\}$ は

初項 $-\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$, 公比 $\frac{n-1}{n}$ の等比数列 $f_n = 0 \dots$

$$S_n = \frac{-\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right\}}{1 - \frac{n-1}{n}}$$

$$= -\frac{n-1}{n} \cdot \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n \dots *$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{n} = h \quad \text{と} \quad \alpha < \varepsilon$$

$$* = \lim_{n \rightarrow -\infty} (1+h)^n$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (1+h)^{\frac{1}{h}} \right\}^{-1}$$

$$= \frac{1}{e}$$

と仮定する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = -1 \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

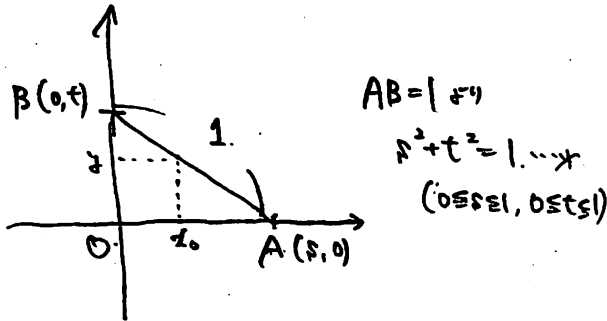
$$= \frac{1}{e} - 1$$

x 軸上の点 $A(s, 0)$ ($0 \leq s \leq 1$) と y 軸上の点 $B(0, t)$ ($0 \leq t \leq 1$) を両端として動く長さ 1 の線分 AB があるとき、

- (1) 線分 AB と直線 $x = x_0$ ($0 \leq x_0 \leq s$) との交点の y 座標を y で表せ。
- (2) 線分 AB が通過する領域を不等式で表せ。

(滋賀医大)

(1)



また、交点の y 座標を y とすると、三角形の相似から、

$$s - x_0 = y = t$$

$$\therefore y = \frac{1}{s} \cdot t \cdot (s - x_0)$$

$$* \text{より } t = \sqrt{1 - s^2} \text{ とおす}$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s} (s - x_0)$$

(2)
$$y = \sqrt{1 - s^2} - \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s} x_0$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2} (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2s) - \frac{s \cdot \frac{1}{2} (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2s) - \sqrt{1 - s^2}}{s^2} x_0$$

$$= -\frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} + \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s^2} \right) x_0$$

$$= \frac{-s^3 + (s^2 + 1 - s^2) x_0}{s^2 \sqrt{1 - s^2}}$$

$$= \frac{-s^3 + x_0}{s^2 \sqrt{1 - s^2}}$$

4.)

s	0	...	$x_0^{\frac{1}{3}}$...	1
$\frac{dy}{ds}$		+	0	-	
y		↗	極大	↘	

4.) $s = x_0^{\frac{1}{3}}$ のとき 極大かつ最大になる。

よって最大値は、

$$\sqrt{1 - x_0^{\frac{2}{3}}} - \frac{\sqrt{1 - x_0^{\frac{2}{3}}}}{x_0^{\frac{1}{3}}} x_0$$

$$= \sqrt{1 - x_0^{\frac{2}{3}}} (1 - x_0^{\frac{2}{3}})$$

$$= (1 - x_0^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore y \leq (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

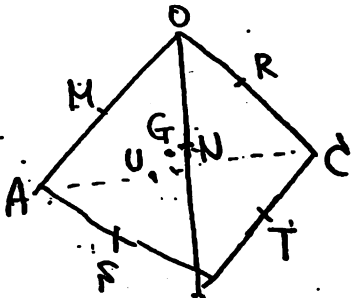
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

* 有名なアステロイドである

$x = x_0$ とし、 y の最大値を求めると、このようになる。

3組の対辺が互いに垂直であるような四面体Vがある。このとき、Vの各辺の中点は、Vの重心を中心とするある1つの球面上にあることを示せ。

(1991 京都大・文理)



頂点 ε O, A, B, C,
各辺の中点を図の如くに M, N, R, S, T, U,
重心を G とする。また、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$,

$\vec{OC} = \vec{c}$ とする。

$$\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

また、 $\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$, $\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$,

$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ かつ

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = k$

この式の値を k とおく。

$$\begin{aligned} |\vec{GM}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k) \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$|\vec{GN}|^2$, $|\vec{GR}|^2$ も同様に計算する

$$|\vec{GM}| = |\vec{GN}| = |\vec{GR}|$$

$$\begin{aligned} \text{また、} |\vec{GS}|^2 &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k) \dots \textcircled{2}$$

$|\vec{GT}|^2$, $|\vec{GU}|^2$ も同様に計算する

$$|\vec{GS}| = |\vec{GT}| = |\vec{GU}|$$

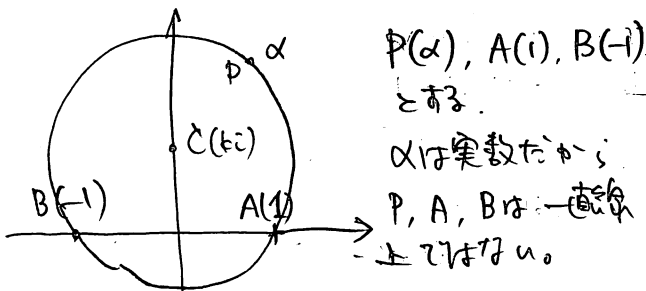
また、①②の計算結果が同じだから

$$|\vec{GM}| = |\vec{GN}| = |\vec{GR}| = |\vec{GS}| = |\vec{GT}| = |\vec{GU}|$$

よって、各辺の中点は G を中心とする 1 つの球面上にある。

複素数 α に対してその共役複素数を $\bar{\alpha}$ であらわす. α を実数ではない複素数とする. 複素平面内の円 C が $1, -1, \alpha$ を通るならば, C は $-\frac{1}{\bar{\alpha}}$ も通ることを示せ.

(2004 京都大・理系)



$P(\alpha), A(1), B(-1)$ とする.
 α は実数だから,
 P, A, B は一直線上に
 上ではないう。

したがって, 円の中心は虚軸上にある.
 中心を $C(ki)$ (k は実数) とする:

$$AC = |1 - ki|$$

$$= \sqrt{1 + k^2}$$

$$PC^2 = AC^2 \text{ より}$$

$$(\alpha - ki)(\bar{\alpha} + ki) = 1 + k^2$$

$$\alpha \bar{\alpha} + k\alpha i - k\bar{\alpha} i + k^2 = 1 + k^2$$

$$\alpha \bar{\alpha} + k\alpha i - k\bar{\alpha} i = 1 \quad \dots *$$

$-\frac{1}{\bar{\alpha}}$ を表す点と C との距離は $|\frac{1}{\bar{\alpha}} - ki|$ と表せるので,

$$\left| \frac{1}{\bar{\alpha}} - ki \right|^2 = \left(\frac{1}{\bar{\alpha}} - ki \right) \left(-\frac{1}{\alpha} + ki \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha \bar{\alpha}} - \frac{1}{\bar{\alpha}} ki + \frac{1}{\alpha} ki + k^2$$

$$= \frac{1 - \alpha ki + \bar{\alpha} ki + \alpha \bar{\alpha} k^2}{\alpha \bar{\alpha}}$$

ここで * より $-\alpha ki + \bar{\alpha} ki + 1 = \alpha \bar{\alpha}$ となる.

$$\left| \frac{1}{\bar{\alpha}} - ki \right|^2 = \frac{\alpha \bar{\alpha} + \alpha \bar{\alpha} k^2}{\alpha \bar{\alpha}}$$

$$= 1 + k^2$$

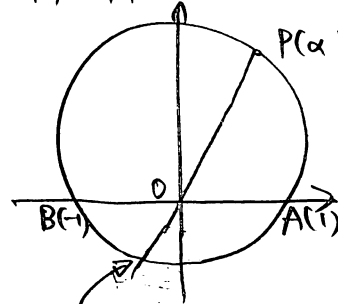
$$\therefore \left| \frac{1}{\bar{\alpha}} - ki \right| = \sqrt{1 + k^2}$$

よって, $-\frac{1}{\bar{\alpha}}$ は C 上にある.

(B1) (点 α の設定などは同じ)

$$-\frac{1}{\bar{\alpha}} = -\frac{\alpha}{\alpha \bar{\alpha}} = -\frac{\alpha}{|\alpha|^2}$$

となるので, $-\frac{1}{\bar{\alpha}}$ を表す点を P' とすると,
 P', O, P は O に関して一直線上にある.



$$OA \cdot OB = 1 \cdot 1 = 1$$

よって $P' \in C$ であることが示す.

$$OP \cdot OP' = |\alpha| \cdot \left| -\frac{1}{\bar{\alpha}} \right|$$

$$= |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|}$$

$$= |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|}$$

$$= 1$$

$$\text{よって } OA \cdot OB = OP \cdot OP'$$

よって 円周角の定理の逆により, 同一円周上にある.

(B12) (P の設定などは (B1) と同じ)

$\angle APO = \angle OBP'$ を示す.

$$\angle APO = \angle OBP'$$

$$= \arg \frac{1 - \alpha}{\alpha - 0} - \arg \frac{0 - (-1)}{-\frac{1}{\bar{\alpha}} - (-1)}$$

$$= \arg \frac{1 - \alpha}{\alpha} - \arg \frac{\bar{\alpha}}{-1 + \bar{\alpha}}$$

$$= \arg \frac{\frac{1 - \alpha}{\alpha}}{\frac{\bar{\alpha}}{-1 + \bar{\alpha}}}$$

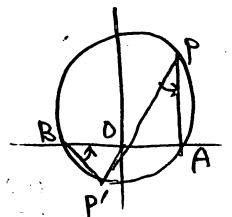
$$= \arg \frac{(1 - \alpha) \cdot (-1 + \bar{\alpha})}{\alpha \bar{\alpha}}$$

$$= \arg \frac{|1 - \alpha|^2}{|\alpha|^2}$$

$$= 0 \quad (\because \frac{|1 - \alpha|^2}{|\alpha|^2} \text{ は正の実数})$$

よって, 円周角の定理の逆より

4点は同一円周上.



n を正の整数とする.

(1) $x \geq 0$ のとき, $e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt$ の値を求めよ.

(1989 大阪女子大)

(1). $f_n(x) = e^x - \frac{x^n}{n!}$ とする.

i) $n=1$ とする.

$$f_1(x) = e^x - x$$

$$f_1'(x) = e^x - 1 \geq 0 \quad (x \geq 0 \text{ 対し})$$

よって $x \geq 0$ に対し $f_1(x)$ は単調増加.
 ところで $f_1(0) = 1 > 0$ であり成り立つ.

ii) $n=k+1$ とする. $x \geq 0$ に対し

$f_k(x) > 0$ と仮定する.

$$f_{k+1}(x) = e^x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$f_{k+1}'(x) = e^x - \frac{x^k}{k!}$$

仮定より $x \geq 0$ に対し $f_k(x) > 0$

より $f_{k+1}(x)$ は単調増加. また.

$$f_{k+1}(0) = 1 > 0 \text{ であり}$$

$x \geq 0$ に対し $f_{k+1}(x) > 0$ が成り立つ

以上より. 数学的帰納法により

$f_n(x) > 0$ が成り立つ.

$$e^x > \frac{x^n}{n!} \text{ が成り立つ}$$

(2) $I_n = \int_0^x t^n e^{-t} dt$ とおく.

$$I_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left([-e^{-t} t^n]_0^x \right.$$

$$\left. + \int_0^x e^{-t} \cdot n t^{n-1} dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x^n e^{-x} + n \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt \right)$$

よって.

$$(1) \text{ より } e^x > \frac{x^n}{n!} \text{ となる}$$

$$0 < x^n e^{-x} < n!$$

$$0 < x^{n+1} e^{-x} < (n+1)!$$

$$0 < x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x} \text{ によりはたみよしの原理より}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0 \text{ が成り立つ}$$

$$I_n = \lim_{x \rightarrow \infty} n \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt$$

$$= n I_{n-1}$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2}$$

$$= n(n-1) \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot I_1$$

$$[-e^{-t}]_0^x$$

$$\therefore I_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ [-e^{-t} t]_0^x - \int_0^x e^{-t} dt \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{-x} x + e^{-x} + 1)$$

$$= 1$$

$$\text{よって } I_n = n!$$

$$\textcircled{答} \Gamma(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \text{ を}$$

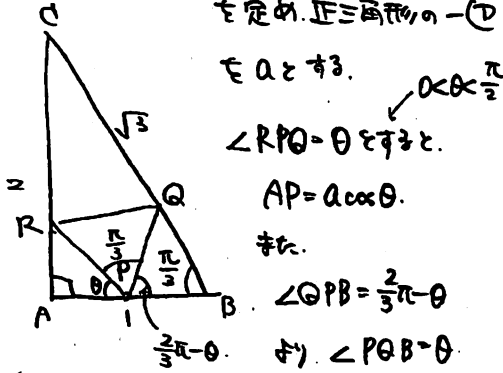
ガンマ関数という

各辺の長さが1, 2, $\sqrt{3}$ の三角形の各辺に1点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ。

(1997 東工大)



与えら、1, 2, $\sqrt{3}$ の三角形は直角三角形である。図9FにA, B, C, P, Q, Rを定め、正三角形の一辺をaとする。



$\theta < \theta < \frac{\pi}{2}$
 $\angle RPQ = \theta$ とすると、
 $AP = a \cos \theta$
 かつ、
 $\angle QPB = \frac{2}{3}\pi - \theta$
 かつ、 $\angle QRB = \frac{\pi}{3} - \theta$

したがって、 $\triangle PQR$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1 - a \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$-a \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - a \cos \theta)$$

$$(2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) a = \sqrt{3}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}$$

$\triangle PQR$ の面積 N は

$$N = \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{(2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)^2}$$

したがって、 $|2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta|$ が最大になるとき、 N は最小値をとる。

N は最小値 $\frac{3}{28}$

$$2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{7} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで } \alpha \text{ は } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \\ \text{である。} \end{array} \right)$$

したがって、 $|2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta|$ の最大値は $\sqrt{7}$

よって、 N の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{3}{28} \sqrt{3}$$

(5) 座標を x, y とおき、若干おとし、

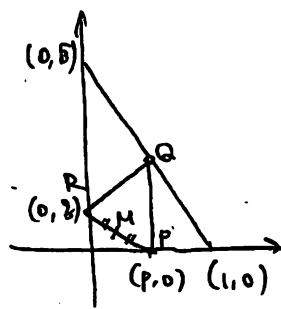


図9Fに M をとると

$$M \left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2} \right)$$

$$MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{p^2 + q^2}$$

\overrightarrow{MQ} は \overrightarrow{PR} と垂直だから

$$\overrightarrow{MQ} \parallel (q, p)$$

$$\overrightarrow{MQ} = MQ \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} (q, p)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (q, p)$$

$$\text{よって、} \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ}$$

$$= \left(\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} q, \frac{q}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} p \right)$$

よって、 $q = -\sqrt{3}p + \sqrt{3}$ とおくと

$$\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} p = -\sqrt{3} \left(\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} q \right) + \sqrt{3}$$

$$2q + \sqrt{3}p = \sqrt{3}$$

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - p)$$

$$\text{よって、} N = \frac{1}{2} PR^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (p^2 + q^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(p^2 + \frac{3}{4} (1 - p)^2 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{7}{4} p^2 - \frac{3}{2} p + \frac{3}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left\{ \frac{7}{4} \left(p - \frac{3}{7} \right)^2 - \frac{9}{28} + \frac{3}{4} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{7}{4} \left(p - \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{3}{7} \right\}$$

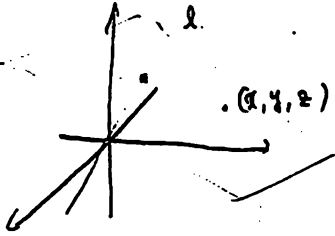
$$p = \frac{3}{7}, q = \frac{2\sqrt{3}}{7} \text{ のとき、最小値 } \frac{3\sqrt{3}}{28}$$

xyz空間の原点と点(1,1,1)を通る直線を l とする。

(1) l 上の点 $(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3})$ を通り、 l と垂直な平面が、 xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

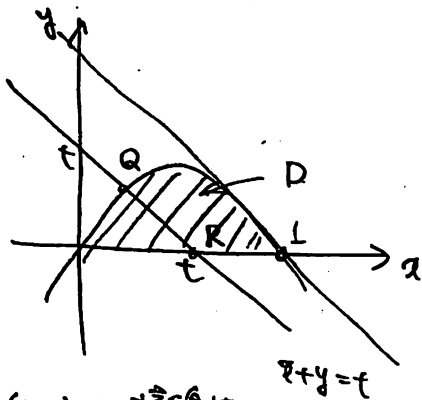
(2) 不等式 $0 \leq y \leq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。 l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

(2009 東工大)

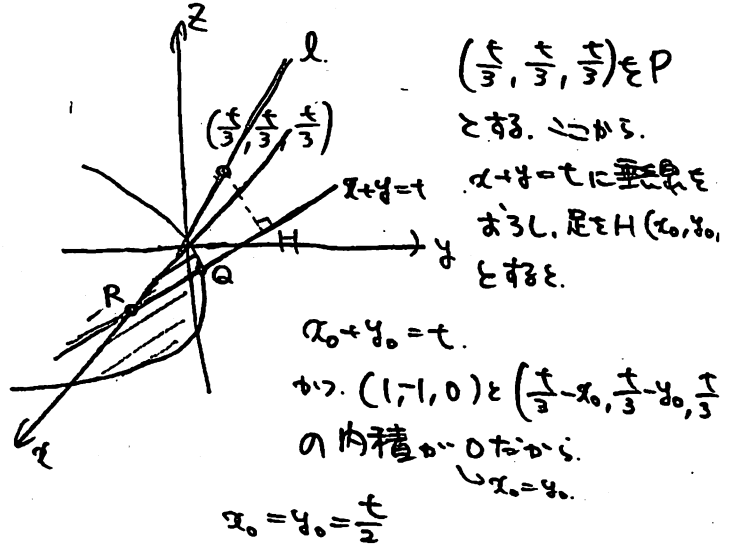


(1) 平面上の点 (x, y, z) とすると、
ベクトル $(x - \frac{t}{3}, y - \frac{t}{3}, z - \frac{t}{3})$ と、
 $(1, 1, 1)$ が垂直だから、内積が0。よって
 $x - \frac{t}{3} + y - \frac{t}{3} + z - \frac{t}{3} = 0$ 。
 $x + y + z - t = 0$ 。
 $z = 0$ を代入すると、
 $x + y - t = 0$ 。よって $z = 0$ 。

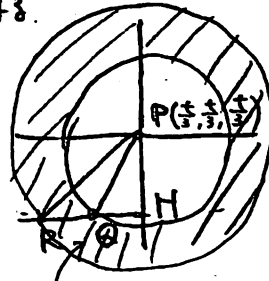
(2) $0 \leq y \leq x(1-x)$ を図示すると、下図



$(1, 0)$ での接線は
 $x + y = 1$ になり、 z は0。
 $x + y = t$ が D と共有点を持つとき、
 $0 \leq t \leq 1$ 。



よって、 $H(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 0)$ がある。よって、 D の外
側にはあるが、図の通り Q, R があり、(1)で求めた
平面で切り、たまたま、 P は一番遠い点 R 、 G は Q
になる。



Q は、 $\begin{cases} x + y = t \\ y = x(1-x) \end{cases}$
と解く。
 $Q(t - \sqrt{t}, t - 1 + \sqrt{t}, 0)$
 R は $(t, 0, 0)$ かつ

この円環の面積 $N(t)$ は、

$$N(t) = \pi PR^2 - \pi PQ^2$$

$$= \pi \left\{ \left(\frac{2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 - (1 - \sqrt{t} - \frac{t}{3})^2 - (t - 1 + \sqrt{t} - \frac{t}{3})^2 \right\}$$

$$= \pi (4t - 4 + 4\sqrt{1-t} - 2t\sqrt{1-t})$$

また、 $OP = l$ とすると、 $l = \sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2} = \frac{t}{\sqrt{3}}$ かつ
 $dl = \frac{1}{\sqrt{3}} dt$

$$よって、V = \int_0^1 N(t) dl$$

$$= \int_0^1 N(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dt = \dots = \frac{2\sqrt{3}}{45} \pi$$

楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ の焦点のうち、 x 座標が正であるものを F とし、 F を通る直線と楕円の交点を A, B とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) ベクトル \overrightarrow{FA} が x 軸の正の向きとなす角を θ とするとき、 $FA = \frac{16}{5+3\cos\theta}$ となることを示せ。

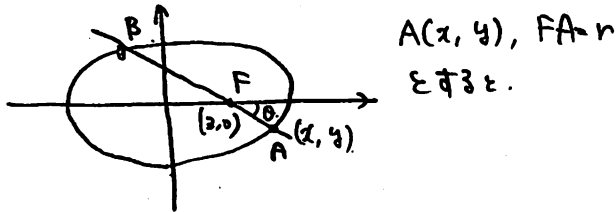
(2) $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{5}{8}$ であることを示せ。

(1991 愛知教育大)

【追加問題】

O を原点とする楕円 C を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ とする。楕円 C の周上に 2 点 P, Q が $OP \perp OQ$ を満たしながら動くとき、 $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$ が一定であることを示せ。

(1) F の座標は、 $\sqrt{25-16} = 3$ より
(3, 0)



$$\begin{aligned} r^2 &= (x-3)^2 + y^2 \\ &= (x-3)^2 + 16 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) \\ &= \frac{9}{25}x^2 - 6x + 25 \\ &= \left(\frac{3}{5}x - 5\right)^2 \end{aligned}$$

$\therefore r = 5 - \frac{3}{5}x$

$$r = \left| \frac{3}{5}x - 5 \right| = 5 - \frac{3}{5}x$$

$$x = 3 + r\cos\theta$$

$$r = 5 - \frac{3}{5}(3 + r\cos\theta)$$

$$\frac{5+3\cos\theta}{5}r = \frac{16}{5}$$

$$r = \frac{16}{5+3\cos\theta}$$

※ \sim 9 式を代入して $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ となる。

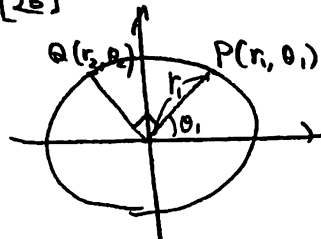
$$r = a - \frac{a^2 - b^2}{a} \cos\theta$$

$$(2) FB = \frac{16}{5+3\cos(\theta+\pi)} = \frac{16}{5-3\cos\theta}$$

$$\therefore \frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{5+3\cos\theta + 5-3\cos\theta}{16} = \frac{5}{8}$$

※ この問題は、焦点を極とするとき、追加問題のように O を極とするときもあつた。

【追】



図のように P, Q を定めると
 $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\theta_2 &= -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 &= \cos\theta_1 \end{aligned}$$

P は楕円上の点 \therefore

$$\frac{r_1^2 \cos^2\theta_1}{a^2} + \frac{r_1^2 \sin^2\theta_1}{b^2} = 1 \quad \therefore \frac{1}{r_1^2} = \frac{\cos^2\theta_1}{a^2} + \frac{\sin^2\theta_1}{b^2}$$

$$Q \text{ も同様} \quad \frac{1}{r_2^2} = \frac{\cos^2\theta_2}{a^2} + \frac{\sin^2\theta_2}{b^2} = \frac{\sin^2\theta_1}{a^2} + \frac{\cos^2\theta_1}{b^2}$$

\therefore

$$\begin{aligned} \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (\text{一定}) \end{aligned}$$

※ 極を使わずに、 $P(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすれば

$$OP \perp OQ \iff x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \text{ を条件として}$$

計算すれば、1-1-2-2

$0 \leq x \leq 1$ に対して、 $a + bx \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} \leq a + cx$ が常に成り立っている。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) a の値を求めよ。

(2) b の最大値と c の最小値をそれぞれ求めよ。

(2009 一橋大)

(1). $0 \leq x \leq 1$ に常に成り立つ
 かつ、 $x=0$ のときも成り立つ。

かつ、 $a \leq 1 \leq a$
 となり、 $a=1$

(2). $a=1$ を代入する。

$$1 + bx \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} \leq 1 + cx$$

$$bx \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} - 1 \leq cx$$

$x=0$ のとき、この式は常に成り立つ。 $x \neq 0$ のとき

$$b \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2x} - \frac{1}{x} \leq c$$

かつ、 $0 < x \leq 1$ のとき、この式は常に成り立つ。
 したがって、 b, c の条件を求めよう。

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-x} - 2}{2x} \quad \text{と置く。}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cdot (2e^{2x} - e^{-x}) - (e^{2x} + e^{-x} - 2)}{x^2}$$

$$= \frac{(2x-1)e^{2x} + (-x-1)e^{-x} + 2}{2x^2}$$

$$g(x) = (2x-1)e^{2x} + (-x-1)e^{-x} + 2$$

と置く。

$$g'(x) = (2x-1) \cdot 2e^{2x} + 2e^{2x}$$

$$+ (-x-1) \cdot (-e^{-x}) - 1e^{-x}$$

$$= (4e^{2x} + e^{-x})x$$

$0 < x \leq 1$ のとき、 $g'(x) > 0$ となる。

$g(x)$ はこの範囲で単調増加。

また、 $g(0) = 0$ かつ、

$0 < x \leq 1$ である。 $g(x) > 0$ 。

したがって、 $f'(x) > 0$ 。

かつ、 $f(x)$ は $0 < x \leq 1$ で単調増加。

$$f(1) = \frac{e^2 + e^{-1} - 2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} - 1}{(-x)} \right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

かつ、

$$\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{e^2 + e^{-1} - 2}{2}$$

かつ、 b の最大値は $\frac{1}{2}$ 。

$$c \text{ の最大値は } \frac{e^2 - 2e + 1}{2e}$$

$a_1 = \frac{1}{2}$ とし、数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1, 2, 3, \dots$ に対し $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。 $n > 1$ のとき、 $b_n > 2n$ となることを示せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ を求めよ。

(2006 東大・理)

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{(1+a_n)^2}{a_n} \\ &= a_n + 2 + \frac{1}{a_n} \end{aligned}$$

よって、 $b_{n+1} = b_n + 2 + \frac{1}{b_n}$ である。これを便す。数学的帰納法で示す。

i) $n=2$ のとき

$$b_2 = b_1 + 2 + \frac{1}{b_1} = \frac{9}{2} > 4$$

よって、成り立つ。

ii) $n=k$ のとき、 $b_k > 2k$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= b_k + 2 + \frac{1}{b_k} \\ &> 2k + 2 \\ &= 2(k+1) \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ でも成り立つ。

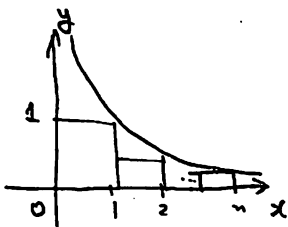
よって、数学的帰納法より示された。

(2) (1) より、 $b_n > 2n$ が成り立つ。

$$\frac{1}{2n} > a_n \text{ が成り立つ。}$$

よって、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$



よって、図のような面積を考へると。

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n.$$

よって、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{1}{2} (1 + \log n)$$

また、 $a_1 > 0$ と漸化式より a_n は帰納的に正である。

$$0 < \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) < \frac{1}{2n} (1 + \log n)$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ より、 0 に収束する。

よって、原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 0.$$

(3) * より、 $\frac{1}{b_n} = b_{n+1} - b_n - 2$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = (-b_1 + b_2) + (-\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3}) + \dots + (-\frac{1}{b_n} + b_{n+1}) - 2 \\ &= -b_1 + b_{n+1} - 2n \\ &= -2 + \frac{1}{a_{n+1}} - 2n. \end{aligned}$$

$$\text{よって、 } a_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k + 2 + 2n}$$

$$\text{よって、 } \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sum_{k=1}^n a_k + 2 + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k + \frac{2}{n} + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \quad ((2) \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0)$$