

# 合格への10問(理)

## 【第1回】

$n$  を2以上の自然数とする. 平面上の  $OA_1A_2$  は  $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$ ,  $OA_1 = 1$ ,  $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$  をみたすとする.  $A_2$  から  $OA_1$  へ垂線をおろし, 交点を  $A_3$  とする.  $A_3$  から  $OA_2$  へ垂線をおろし, 交点を  $A_4$  とする. 以下同様に,  $k = 4, 5, \dots$  について,  $A_k$  から  $OA_{k-1}$  へ垂線をおろし, 交点を  $A_{k+1}$  とし, 順番に  $A_5, A_6, \dots$  を定める.  $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$  とおくと, 以下の問に答えよ.

(1)  $k = 1, 2, \dots$  のとき,  $\vec{h}_k$  と  $\vec{h}_{k+1}$  の内積  $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$  を  $n$  と  $k$  で表せ.

(2)  $S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$  とおくと, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ.

(2008 東北大・理・一部省略)

$x$  軸上の点  $A(s, 0)$  ( $0 < s < 1$ ) と  $y$  軸上の点  $B(0, t)$  ( $0 < t < 1$ ) を両端として動く長さ1の線分  $AB$  があるとき,

(1) 線分  $AB$  と直線  $x = x_0$  ( $0 < x_0 < s$ ) との交点の  $y$  座標を  $s, x_0$  で表せ.

(2) 線分  $AB$  が通過する領域を不等式で表せ.

(滋賀医大)

3組の対辺が互いに垂直であるような四面体  $V$  がある. このとき,  $V$  の各辺の中点は,  $V$  の重心を中心とするある1つの球面上にあることを示せ.

(1991 京都大・文理)

行列  $X = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$  ( $t$  は実数) による  $xy$  平面上の一次変換を考える. 中心  $(0, \alpha)$ , 半径1の円をこの変換で移した図形を  $C$  とする. ただし,  $\alpha > 1$  とする.

(1)  $C$  が  $x$  軸と共有点をもつような  $t$  の範囲を  $\alpha$  を用いて表せ.

(2)  $C$  が  $x$  軸,  $y$  軸のいずれとも接するような  $\alpha$  と  $t$  の値を求めよ.

(名古屋大)

## 【第2回】

$n$  を正の整数とする.

(1)  $x > 0$  のとき,  $e^x > \frac{x^n}{n!}$  が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt$  の値を求めよ.

(1989 大阪女子大)

各辺の長さが  $1, 2, \sqrt{3}$  の三角形の各辺に 1 点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ.

(1997 東工大)

$xyz$  空間の原点と点  $(1, 1, 1)$  を通る直線を  $l$  とする.

(1)  $l$  上の点  $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$  を通り,  $l$  と垂直な平面が,  $xy$  平面と交わってできる直線の方程式を求めよ.

(2) 不等式  $0 < y < x(1-x)$  の表す  $xy$  平面内の領域を  $D$  とする.  $l$  を軸として  $D$  を回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

(2009 東工大)

【第 3 回】

楕円  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  の焦点のうち,  $x$  座標が正であるものを  $F$  とし,  $F$  を通る直線と楕円の交点を  $A, B$  とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) ベクトル  $\overrightarrow{FA}$  が  $x$  軸の正の向きとなす角を  $\theta$  とするとき,  $FA = \frac{16}{5 + 3 \cos \theta}$  となることを示せ.

(2)  $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{5}{8}$  であることを示せ.

(1991 愛知教育大)

【追加問題】

$O$  を原点とする. 楕円  $C$  を  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) とする. 楕円  $C$  の周上を 2 点  $P, Q$  が  $OP \perp OQ$  を満たしながら動くとき,  $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$  が一定であることを示せ.

$0 < x < 1$  に対して,  $a + bx < \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} < a + cx$  が常に成り立っている. ただし,  $e$  は自然対数の底である.

(1)  $a$  の値を求めよ.

(2)  $b$  の最大値と  $c$  の最小値をそれぞれ求めよ.

(2009 一橋大)

$a_1 = \frac{1}{2}$  とし, 数列  $\{a_n\}$  を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(3) 各  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とおく.  $n > 1$  のとき,  $b_n > 2n$  となることを示せ.

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  を求めよ.

(5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$  を求めよ.

(2006 東大・理)