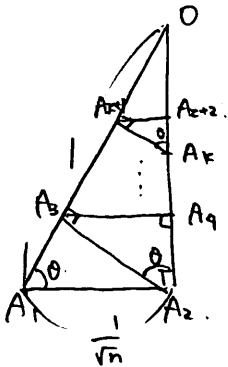


$n$  を 2 以上の自然数とする. 平面上の  $\triangle OA_1A_2$  は  $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$ ,  $OA_1 = 1$ ,  $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$  をみたすとする.  $A_2$  から  $OA_1$  へ垂線をおろし, 交点を  $A_3$  とする.  $A_3$  から  $OA_2$  へ垂線をおろし, 交点を  $A_4$  とする. 以下同様に,  $k = 4, 5, \dots$  について,  $A_k$  から  $OA_{k-1}$  へ垂線をおろし, 交点を  $A_{k+1}$  とし, 順番に  $A_5, A_6, \dots$  を定める.  $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$  とおくと, 以下の間に答えよ.

(1)  $k = 1, 2, \dots$  のとき,  $\vec{h}_k$  と  $\vec{h}_{k+1}$  の内積  $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$  を  $n$  と  $k$  で表せ.

(2)  $S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$  とおくと, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ.

(2008 東北大・理・一部省略)



□  $\theta$  と  $k$   
 $\angle OA_1A_2 = \theta$  とする.

$\angle A_{k+2}A_kA_{k+1} = \theta$

$\sum \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$

$A_kA_{k+1} \cdot \sin \theta = A_{k+1}A_{k+2}$

と  $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$

$$\begin{aligned} (\text{1. } \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}) &= (\sin \theta)^{k-1} \cdot A_1A_2 \\ &= \frac{(\sin \theta)^{k-1}}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\vec{h}_k = \overrightarrow{A_kA_{k+1}} \quad \text{と} \quad \vec{h}_{k+1} = \overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$$

$\angle$  は  $\pi - (\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\pi}{2} + \theta$  とする.

$$\begin{aligned} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} &= |\overrightarrow{A_kA_{k+1}}| \cdot |\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) \\ &= \frac{(\sin \theta)^{k-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(\sin \theta)^k}{\sqrt{n}} \cdot (-\sin \theta) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{n} \cdot (\sin \theta)^{2k}$$

$\therefore \triangle OA_1A_2$  を考える.

$$OA_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \quad \text{とする.}$$

$$\sin \theta = \frac{OA_2}{OA_1} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

$$\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} = -\frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

(2) 数列  $\{\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}\}$  は

初項  $-\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$ , 公比  $\frac{n-1}{n}$  の等比数列である.

$$S_n = \frac{-\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right\}}{1 - \frac{n-1}{n}}$$

$$= -\frac{n-1}{n} \cdot \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^n \dots *$$

$$\rightarrow \frac{1}{n} = h \quad \text{と} \quad h \rightarrow 0$$

$$* = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (1+h)^{\frac{1}{h}} \right\}^{-1}$$

$$= \frac{1}{e}$$

と  $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -1 \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

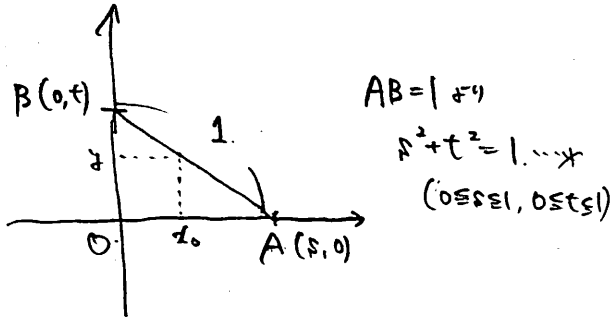
$$= \frac{1}{e} - 1$$

$x$  軸上の点  $A(s, 0)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) と  $y$  軸上の点  $B(0, t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) を両端として動く長さ 1 の線分  $AB$  があるとき,

- (1) 線分  $AB$  と直線  $x = x_0$  ( $0 \leq x_0 \leq s$ ) との交点の  $y$  座標を  $y$ ,  $x_0$  で表せ.
- (2) 線分  $AB$  が通過する領域を不等式で表せ.

(滋賀医大)

(1)



また、交点の  $y$  座標を  $y$  とする。三角形の相似から、

$$s - x_0 = y = \frac{t}{s} \cdot (s - x_0)$$

$$\text{よって } y = \frac{1}{s} \cdot t \cdot (s - x_0)$$

$$* \text{より } t = \sqrt{1 - s^2} \text{ だから}$$

$$y = \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s} (s - x_0)$$

$$(2) \quad y = \sqrt{1 - s^2} - \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s} x_0$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{s} (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2s) - \frac{s \cdot \frac{1}{2} (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2s) - \sqrt{1 - s^2}}{s^2} x_0$$

$$= -\frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} + \left( \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} + \frac{\sqrt{1 - s^2}}{s^2} \right) x_0$$

$$= \frac{-s^3 + (s^2 + 1 - s^2) x_0}{s^2 \sqrt{1 - s^2}}$$

$$= \frac{-s^3 + x_0}{s^2 \sqrt{1 - s^2}}$$

4.)

$s$	0	...	$x_0^{\frac{1}{3}}$	...	1
$\frac{dy}{ds}$		+	0	-	
$y$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

4.)  $s = x_0^{\frac{1}{3}}$  のとき 極大かつ最大になる。  
 よって最大値は、

$$\sqrt{1 - x_0^{\frac{2}{3}}} - \frac{\sqrt{1 - x_0^{\frac{2}{3}}}}{x_0^{\frac{1}{3}}} x_0$$

$$= \sqrt{1 - x_0^{\frac{2}{3}}} (1 - x_0^{\frac{2}{3}})$$

$$= (1 - x_0^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{よって } y \leq (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

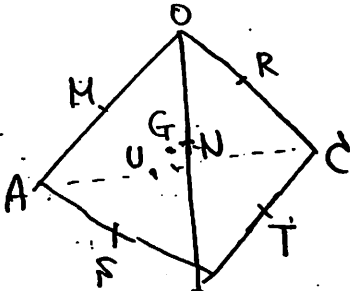
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

\* 有名なASTROIDである

$x = x_0$  と  $t = 0$  のとき 最大値をとり、そのとき、

3組の対辺が互いに垂直であるような四面体Vがある。このとき、Vの各辺の中点は、Vの重心を中心とするある1つの球面上にあることを示せ。

(1991 京都大・文理)



頂点を  $O, A, B, C$ ,  
各辺の中点を図の如くに  $M, N, R, S, T, U$ ,  
重心を  $G$  とする。また  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,

$\vec{OC} = \vec{c}$  とする。

$$\vec{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}$$

また  $\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ ,  $\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$ ,

$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$  かつ

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = k$

この式の値を  $k$  とおく。

$$\begin{aligned} |\vec{GM}|^2 &= \left| \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k) \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$|\vec{GN}|^2$ ,  $|\vec{GR}|^2$  も同様に計算する。

$$|\vec{GM}| = |\vec{GN}| = |\vec{GR}|$$

$$\begin{aligned} \# \text{f. } |\vec{GF}|^2 &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \left| \frac{\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2k) \dots \textcircled{2}$$

$|\vec{GT}|^2$ ,  $|\vec{GU}|^2$  も同様に計算する。

$$|\vec{GF}| = |\vec{GT}| = |\vec{GU}|$$

また ①②の計算結果が同じだから

$$|\vec{GM}| = |\vec{GN}| = |\vec{GR}| = |\vec{GF}| = |\vec{GT}| = |\vec{GU}|$$

よって、各辺の中点は  $G$  を中心とする1つの球面上にある。

行列  $X = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$  ( $t$  は実数) による  $xy$  平面上の一次変換を考える. 中心  $(0, \alpha)$ , 半径 1 の円をこの変換で移した図形を  $C$  とする. ただし,  $\alpha > 1$  とする.

- (1)  $C$  が  $x$  軸と共有点をもつような  $t$  の範囲を  $\alpha$  を用いて表せ.  
 (2)  $C$  が  $x$  軸,  $y$  軸のいずれとも接するような  $\alpha$  と  $t$  の値を求めよ.

(名古屋大)

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

より  $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ,  $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$  の行列は, 回転と拡大の合成を表している.

$$(1) \quad X = \sqrt{t^2+1} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \end{pmatrix}$$

$$\text{よ} \Rightarrow \cos \theta = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}$$

とすると,  $X$  は原点を中心に  $\theta$  回転し, 原点からの距離を  $\sqrt{t^2+1}$  倍にする変換を表す.

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ t\alpha \end{pmatrix}$$

で, 半径は  $\sqrt{t^2+1}$  となる.

$$\sqrt{t^2+1} \geq t\alpha$$

を満たせばよい. よって, 変形すると

$$t^2 - t\alpha + 1 \geq 0$$

$$t^2(-1+\alpha^2) \leq 1$$

$\alpha > 1$  より

$$-\frac{1}{\alpha^2-1} \leq t \leq \frac{1}{\alpha^2-1}$$

(2) 移した先の中心  $(\alpha, t\alpha)$ , 半径  $\sqrt{t^2+1}$  の円となる.

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{t^2+1} \\ t\alpha = \pm \sqrt{t^2+1} \end{cases}$$

$$\text{よ} \Rightarrow t = \pm 1, \quad \alpha = \sqrt{2}$$

$n$  を正の整数とする.

(1)  $x \geq 0$  のとき,  $e^x > \frac{x^n}{n!}$  が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt$  の値を求めよ.

(1989 大阪女子大)

(1)  $f_n(x) = e^x - \frac{x^n}{n!}$  とする.

i)  $n=1$  のとき.

$$f_1(x) = e^x - x$$

$$f_1(x) = e^x - 1 \geq 0 \quad (x \geq 0 \text{ 対して})$$

よって  $x \geq 0$  に対して  $f_1(x)$  は単調増加.  
 かつ  $f_1(0) = 1 > 0$  対して成り立つ.

ii)  $n=k+1$  のとき.  $x \geq 0$  に対して

$f_k(x) > 0$  と仮定する.

$$f_{k+1}(x) = e^x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$f'_{k+1}(x) = e^x - \frac{x^k}{k!}$$

仮定より  $x \geq 0$  に対して  $f'_{k+1}(x) > 0$

だから  $f_{k+1}(x)$  は単調増加. かつ

$$f_{k+1}(0) = 1 > 0 \text{ 対して}$$

$x \geq 0$  に対して  $f_{k+1}(x) > 0$  が成り立つ

よって  $x \geq 0$  に対して  $f_n(x) > 0$  が成り立つ.

$f_n(x) > 0$  が成り立つ.

$$e^x > \frac{x^n}{n!} \text{ が成り立つ}$$

(2) 与式を  $I_n$  とおく.

$$I_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( [-e^{-t} \cdot t^n]_0^x + \int_0^x e^{-t} \cdot n \cdot t^{n-1} dt \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -x^n e^{-x} + n \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt \right)$$

よって

$$(1) \text{ より } e^x > \frac{x^n}{n!} \text{ である}$$

$$0 < x^n e^{-x} < n!$$

$$0 < x^{n+1} e^{-x} < (n+1)!$$

$$0 < x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x} \text{ よりはさみうちの原理から}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0 \text{ が成り立つ}$$

$$I_n = \lim_{x \rightarrow \infty} n \int_0^x e^{-t} t^{n-1} dt$$

$$= n I_{n-1}$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot I_{n-2}$$

$$= n(n-1) \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot I_1 \quad [-e^{-t}]_0^x$$

$$\therefore I_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t e^{-t} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ [-e^{-t} t]_0^x - \int_0^x e^{-t} dt \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} x + e^{-x} + 1 \right)$$

$$= 1$$

$$\text{よって } I_n = n!$$

$$\textcircled{\text{答}} \Gamma(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \text{ である}$$

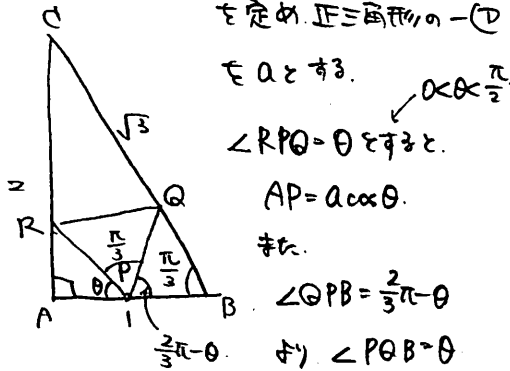
ガンマ関数という

各辺の長さが1, 2,  $\sqrt{3}$ の三角形の各辺に1点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ。

(1997 東工大)



長さが1, 2,  $\sqrt{3}$ の三角形は直角三角形である。図9fにA, B, C, P, Q, Rを定め、正三角形の一辺をaとする。



$\alpha < \frac{\pi}{2}$   
 $\angle RPQ = \theta$  とすると  
 $AP = a \cos \theta$   
 したがって  
 $\angle QPB = \frac{2}{3}\pi - \theta$   
 かつ  $\angle PQB = \theta$

したがって、 $\triangle PBQ$  に正弦定理を用いると

$$\frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1 - a \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$-a \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - a \cos \theta)$$

$$(2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) a = \sqrt{3}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}$$

$\triangle PQR$  の面積  $N$  は

$$N = \frac{1}{2} a^2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{(2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta)^2}$$

したがって  $|2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta|$  が最大になるとき

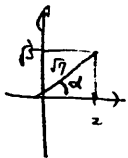
$N$  が最小値になる

$$2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{7} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\left( \text{ここで } \alpha \text{ は } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \right)$$

したがって

したがって  $|2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta|$  の最大値は  $\sqrt{7}$



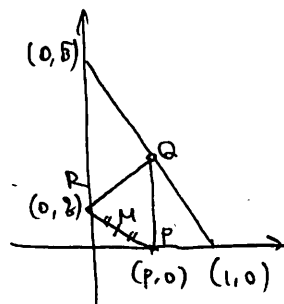
よって  $N$  の最小値は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{(\sqrt{7})^2}$$

$$= \frac{3}{28} \sqrt{3}$$

(5) 座標を用いておこなう。若干おこなう。

図9fに中点をMとする



$$M \left( \frac{p}{2}, \frac{r}{2} \right)$$

$$MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{p^2 + r^2}$$

$\overrightarrow{MQ}$  は  $\overrightarrow{PR}$  と垂直だから

$$\overrightarrow{MQ} \parallel (r, p) \text{ である}$$

$$\overrightarrow{MQ} = MQ \cdot \frac{1}{\sqrt{p^2 + r^2}} (r, p)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (r, p)$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ}$$

$$= \left( \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} r, \frac{r}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} p \right)$$

したがって  $q = -\sqrt{3} p + \sqrt{3}$  上にありかつ

$$\frac{r}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} p = -\sqrt{3} \left( \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} r \right) + \sqrt{3}$$

$$2r + \sqrt{3} p = \sqrt{3}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - p)$$

$$\text{よって } N = \frac{1}{2} PR^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (p^2 + r^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( p^2 + \frac{3}{4} (1 - p)^2 \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{7}{4} p^2 - \frac{3}{2} p + \frac{3}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{7}{4} \left( p - \frac{3}{7} \right)^2 - \frac{9}{28} + \frac{3}{4} \right\}$$

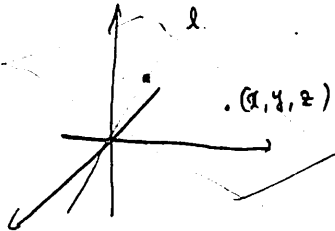
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{7}{4} \left( p - \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{3}{7} \right\}$$

$$p = \frac{3}{7}, r = \frac{2\sqrt{3}}{7} \text{ とき } N \text{ の最小値 } \frac{3\sqrt{3}}{28}$$

$xyz$  空間の原点と点  $(1, 1, 1)$  を通る直線を  $l$  とする.

- (1)  $l$  上の点  $(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3})$  を通り,  $l$  と垂直な平面が,  $xy$  平面と交わってできる直線の方程式を求めよ.
- (2) 不等式  $0 \leq y \leq x(1-x)$  の表す  $xy$  平面内の領域を  $D$  とする.  $l$  を軸として  $D$  を回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

(2009 東工大)



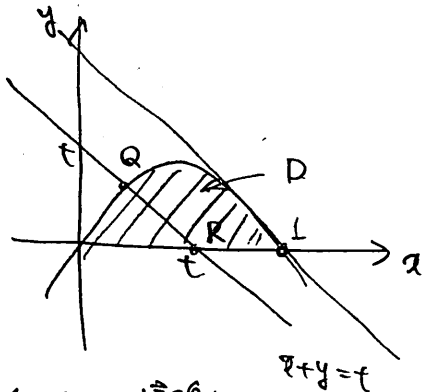
- (1) 平面上の点を  $(x, y, z)$  とおくと.  
ベクトル  $(x - \frac{t}{3}, y - \frac{t}{3}, z - \frac{t}{3})$  と.  
 $(1, 1, 1)$  が垂直だから内積が 0. かつ  
 $x - \frac{t}{3} + y - \frac{t}{3} + z - \frac{t}{3} = 0$ .  
 $x + y + z - t = 0$ .

$z=0$  を代入すると.

$$x + y - t = 0. \text{ かつ } z = 0.$$

(2)

$0 \leq y \leq x(1-x)$  を図示すると. 下図

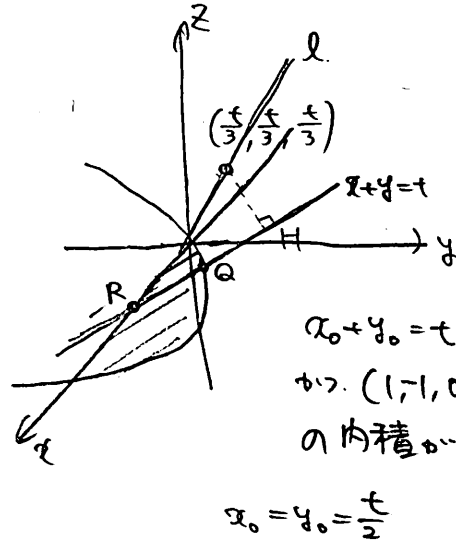


$(1, 0)$  での接線は

$$x + y = 1 \text{ かつ } z = 0$$

$x + y = t$  が  $D$  と共有点をもつとき

$$0 \leq t \leq 1.$$



$$(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}) \in P$$

とする. ことから.

$x + y = t$  に垂直な平面を  
おとし, 足を  $H(x_0, y_0, 0)$   
とすると.

$$x_0 + y_0 = t.$$

$$\text{かつ } (1, 1, 0) \text{ と } (\frac{t}{3} - x_0, \frac{t}{3} - y_0, \frac{t}{3})$$

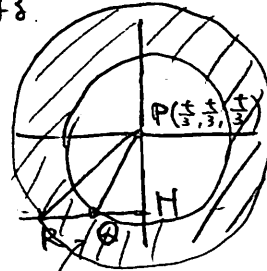
の内積が 0 だから.

$$x_0 = y_0.$$

$$x_0 = y_0 = \frac{t}{2}$$

かつ  $H(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 0)$  とある. したがって  $D$  の外  
側  $y$  にはある  $xy$  図の外側は  $Q, R$  とすると (1) で示した

平面で切ったとき  $P$  から一番遠い点は  $R$ , 一番近い点は  $Q$  に  
なる.



$$Q \text{ は } \begin{cases} x + y = t \\ y = x(1-x) \end{cases}$$

と  $z = 0$ .

$$Q(t - 1 + \sqrt{t}, t - 1 + \sqrt{t}, 0)$$

$$R \text{ は } (t, 0, 0) \text{ かつ}$$

この円環の面積  $S(t)$  は.

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi PR^2 - \pi PQ^2 \\ &= \pi \left\{ (\frac{2}{3}t)^2 + (\frac{t}{3})^2 + (\frac{t}{3})^2 - (1 - \sqrt{t} - \frac{t}{3})^2 - (t - 1 + \sqrt{t} - \frac{t}{3})^2 + (\frac{t}{3})^2 \right\} \\ &= \pi (4t - 4 + 4\sqrt{1-t} - 2t\sqrt{1-t}) \end{aligned}$$

また,  $OP = l$  とすると.  $l = \sqrt{(\frac{t}{3})^2 + (\frac{t}{3})^2 + (\frac{t}{3})^2} = \frac{t}{\sqrt{3}}$  かつ

$$dl = \frac{1}{\sqrt{3}} dt$$

$$\text{よって } V = \int_0^1 S(t) dl$$

$$= \int_0^1 S(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dt = \dots = \frac{2\sqrt{3}}{45} \pi.$$

楕円  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  の焦点のうち、 $x$  座標が正であるものを  $F$  とし、 $F$  を通る直線と楕円の交点を  $A, B$  とする。このとき、次の間に答えよ。

(1) ベクトル  $\vec{FA}$  が  $x$  軸の正の向きとなす角を  $\theta$  とするとき、 $FA = \frac{16}{5+3\cos\theta}$  となることを示せ。

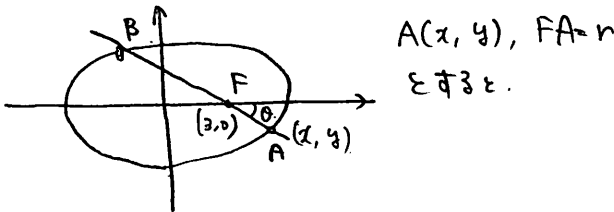
(2)  $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{5}{8}$  であることを示せ。

(1991 愛知教育大)

【追加問題】

$O$  を原点とする楕円  $C$  を  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) とする。楕円  $C$  の周上に 2 点  $P, Q$  が  $OP \perp OQ$  を満たしながら動くとき、 $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2}$  が一定であることを示せ。

(1)  $F$  の座標は  $\sqrt{25-16} = 3$  より  
(3, 0)



$$\begin{aligned} r^2 &= (x-3)^2 + y^2 \\ &= (x-3)^2 + 16 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) \\ &= \frac{9}{25}x^2 - 6x + 25 \\ &= \left(\frac{3}{5}x - 5\right)^2 \end{aligned}$$

$\therefore -5 \leq x \leq 5$  より

$$r = \left| \frac{3}{5}x - 5 \right| = 5 - \frac{3}{5}x$$

$$x = 3 + r\cos\theta \text{ より}$$

$$r = 5 - \frac{3}{5}(3 + r\cos\theta)$$

$$\frac{5+3\cos\theta}{5}r = \frac{16}{5}$$

$$r = \frac{16}{5+3\cos\theta}$$

※  $\sim a$  式を用いると  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  より

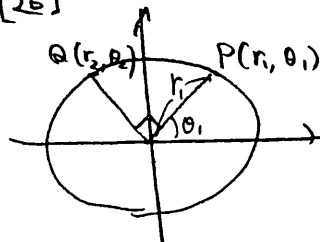
$$r = a - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x \text{ とおけることかかかろ}$$

$$(2) FB = \frac{16}{5+3(\cos\theta+\pi)} = \frac{16}{5-3\cos\theta}$$

$$\therefore \frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{5+3\cos\theta + 5-3\cos\theta}{16} = \frac{5}{8}$$

※ この問題は、焦点を極とするとき  $u = \frac{1}{r}$  とし、追加問題のように  $O$  を極とするときもあつた。

[2問]



図のように  $P, Q$  を定めると

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos\theta_2 &= -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 &= \cos\theta_1 \end{aligned}$$

$P$  は楕円上の点より

$$\frac{r_1^2 \cos^2\theta_1}{a^2} + \frac{r_1^2 \sin^2\theta_1}{b^2} = 1 \quad \therefore \frac{1}{r_1^2} = \frac{\cos^2\theta_1}{a^2} + \frac{\sin^2\theta_1}{b^2}$$

$$Q \text{ も同様にして} \quad \frac{1}{r_2^2} = \frac{\cos^2\theta_2}{a^2} + \frac{\sin^2\theta_2}{b^2} = \frac{\sin^2\theta_1}{a^2} + \frac{\cos^2\theta_1}{b^2}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} &= \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ (一定)} \end{aligned}$$

※ 極を用いると、 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  とおくと

$$\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 0 \text{ より } x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \text{ を条件として}$$

計算する。か、1-1で済む。



$0 \leq x \leq 1$  に対して、 $a + bx \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} \leq a + cx$  が常に成り立っている。ただし、 $e$  は自然対数の底である。

(1)  $a$  の値を求めよ。

(2)  $b$  の最大値と  $c$  の最小値をそれぞれ求めよ。

(2009 一橋大)

(1).  $0 \leq x \leq 1$  に對して常に成り立つ  
 $a$  について、 $x=0$  のときも成り立つ。

よって、 $a \leq 1 \leq a$   
 したがって、 $a=1$

(2).  $a=1$  を代入すると

$$1 + bx \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} \leq 1 + cx$$

$$bx \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2} - 1 \leq cx$$

$x=0$  のとき、この式は常に成り立つ。 $x \neq 0$  のとき

$$b \leq \frac{e^{2x} + e^{-x}}{2x} - \frac{1}{x} \leq c$$

よって  $0 < x \leq 1$  のとき、この式は常に成り立つ。  
 したがって  $b, c$  の条件を求めよう。

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-x} - 2}{2x} \quad \text{と } b < c$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x(2e^{2x} - e^{-x}) - (e^{2x} + e^{-x} - 2)}{x^2}$$

$$= \frac{(2x-1)e^{2x} + (-x-1)e^{-x} + 2}{2x^2}$$

$$g(x) = (2x-1)e^{2x} + (-x-1)e^{-x} + 2$$

と  $b < c$

$$g'(x) = (2x-1) \cdot 2e^{2x} + 2e^{2x} + (-x-1) \cdot (-e^{-x}) - 1e^{-x}$$

$$= (4e^{2x} + e^{-x})x$$

$0 < x \leq 1$  のとき  $g'(x) > 0$  となる。

$g(x)$  はこの範囲で単調増加。

また、 $g(0) = 0$  である。

$0 < x \leq 1$  において  $g(x) > 0$ 。

したがって、 $f(x) > 0$ 。

よって、 $f(x)$  は  $0 < x \leq 1$  で単調増加。

$$f(1) = \frac{e^2 + e^{-1} - 2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} - 1}{(-x)} \right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって

$$\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{e^2 + e^{-1} - 2}{2}$$

よって、 $b$  の最大値は  $\frac{1}{2}$ 。

$$c \text{ の最小値は } \frac{e^3 - 2e + 1}{2e}$$

$a_1 = \frac{1}{2}$  とし, 数列  $\{a_n\}$  を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 各  $n=1, 2, 3, \dots$  に対し  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とおく.  $n > 1$  のとき,  $b_n > 2n$  となることを示せ.

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  を求めよ.

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$  を求めよ.

(2006 東大・理)

$$(1) \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(1+a_n)^2}{a_n} \\ = a_n + 2 + \frac{1}{a_n}$$

∴  $b_{n+1} = b_n + 2 + \frac{1}{b_n}$  \*  
である. これを用い, 数学的帰納法  
で示す.

i)  $n=1$  のとき

$$b_2 = b_1 + 2 + \frac{1}{b_1} = \frac{9}{2} > 4$$

∴ 成り立つ

ii)  $n=k$  のとき  $b_k > 2k$  が成り立つ,  
これを仮定する.

$$b_{k+1} = b_k + 2 + \frac{1}{b_k} \\ > 2k + 2 \\ = 2(k+1)$$

∴  $n=k+1$  でも成り立つ.

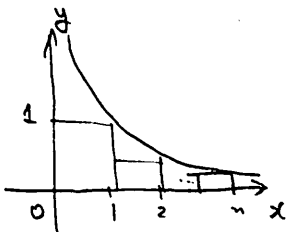
∴ 数学的帰納法より示された.

(2) (1)より  $b_n > 2n$  である.

$$\frac{1}{2n} > a_n \text{ が成り立つ.}$$

∴

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$



∴ 図のような面積を考えると.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$

∴

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{1}{2} (1 + \log n)$$

また,  $a_1 > 0$  と漸化式より  $a_n$  は単調的に正である.

$$0 < \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) < \frac{1}{2n} (1 + \log n)$$

よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$  であり, 0 に収束する.

はすみじの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 0$$

(3) \* であり,  $\frac{1}{b_n} = b_{n+1} - b_n - 2$  であり

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} = (-b_1 + b_2) + (-b_2 + b_3) + \dots + (-b_n + b_{n+1}) - 2n \\ = -b_1 + b_{n+1} - 2n \\ = -2 + \frac{1}{a_{n+1}} - 2n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k + 2 + 2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sum_{k=1}^n a_k + 2 + 2n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k + \frac{2}{n} + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \quad ((2) \text{より } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0)$$