

< 平面の方程式 >

a, b, c, d を実数の定数とする .

(1) xy 平面において, $\vec{n} = (a, b)$ を法線ベクトルとし, 点 (x_0, y_0) を通る直線の方程式は, $ax + by + c = 0$ の形で表せることを示せ .

(2) xyz 空間において, $\vec{n} = (a, b, c)$ を法線ベクトルとし, 点 (x_0, y_0, z_0) を通る平面の方程式は, $ax + by + cz + d = 0$ の形で表せることを示せ .

ベクトル方程式として考える . ポイントは内積が 0 という式から, ベクトル 直線の方程式 (成分の関係式) に変換するところ .

【解答】

(1) 直線上の点を (x, y) とする $\vec{m} = (x - x_0, y - y_0)$ とすると, $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$ より,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

ここで, $-ax_0 - by_0 = 0$ とおくと, $ax + by + c = 0$ を示せる .

(2) 直線上の点を (x, y, z) とする .(1) 同様に内積を考えて,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ここで, $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$ とおくと, $ax + by + cz + d = 0$ を示せる .

【参考】

平面の方程式は, 法線ベクトルと通る 1 点で決定する . なお, 点と平面の距離の式は

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で表せる . なぜなら, $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ と $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$ の内積の絶対値を計算すれば,

$$\begin{aligned} & \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

となる.これは,ベクトル $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ を,ベクトル $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$ 方向に射影したベクトルの大きさを表しており,点と平面の距離を表すことになる.

① 座標空間に 4 点 $A(2, 1, 0), B(1, 0, 1), C(0, 1, 2), D(1, 3, 7)$ がある.3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき,点 E の座標を求めよ.

(2006 京都大(文))

【解答 1】

D から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする.

$$\vec{DH} = \alpha \vec{DA} + \beta \vec{DB} + \gamma \vec{DC} \quad (\text{ただし, } \alpha + \beta + \gamma = 1)$$

と表せる $\vec{DB} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{DH} \cdot \vec{AC} = 0$ より,計算すると, $\alpha = 0, \beta = -2, \gamma = 3$ を得る.よって, $\vec{DH} = (-3, 0, -3)$.以上より,

$$\vec{OE} = \vec{OD} + 2\vec{DH} = (-5, 3, 1)$$

よって, E の座標は $(-5, 3, 1)$

【解答 2】

平面 ABC の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とする. $\vec{AB} = (-1, -1, 1), \vec{AC} = (-2, 0, 2)$ より, $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ を用いて計算すると, $\vec{n} = (1, 0, 1)$ となる.従って,平面 ABC 上の点 (x, y, z) は

$$1 \cdot (x - 2) + 0 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 0) = 0$$

より,

$$x + z - 2 = 0$$

を満たす.従って,垂線の足を DH とすると,実数 k を用いて,

$$\vec{OH} = \vec{OD} + k\vec{n} = (1, 3, 7) + k(1, 0, 1) = (1 + k, 3, 7 + k)$$

と表される.これが, $x + z - 2 = 0$ を満たすので,代入すると $k = -3$ を得る.以上より,

$$\vec{OE} = \vec{OD} + 2k\vec{n} = (-5, 3, 1)$$

② 空間内に3点 $A(1, -1, 1), B(-1, 2, 2), C(2, -1, -1)$ がある。このとき、ベクトル $\vec{OA} + x\vec{AB} + y\vec{AC}$ の大きさの最小値を求めよ。

(2008 信州大)

【解答 1】

$|\vec{OA} + x\vec{AB} + y\vec{AC}|^2 = \dots$
 $14 \left\{ x - \frac{2}{7}(y-1) \right\}^2 + \frac{27}{7} \left(y - \frac{5}{9} \right)^2 + \frac{2}{3}$ を計算し、平方完成をして求める。計算は煩雑だが、ガッツがあれば出来る。

【解答 2】

$\vec{OA} + x\vec{AB} + y\vec{AC}$ は平面 ABC 上の点である。よって、O から平面 ABC 上に下ろした垂線の足を H とすると、OH が求める最小値になる。(計算略) 平面の方程式は $2x + y + z - 2 = 0$ となり、 $\vec{OH} = k(2, 1, 1)$ とすると、H は平面 ABC 上だから、代入して、 $k = \frac{1}{3}$ 。よって、 $\vec{OP} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ となる。以上から、 $|\vec{OP}| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

途中から、平面と直線の距離を使う方法でも良い。

$$|\vec{OP}| = \frac{|2 \cdot 0 + 0 + 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

③ 空間内に3点 $A(1, 3, -1), B(-1, 2, 2), C(2, 0, 1)$ をとる。

- (1) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (2) ベクトル $\vec{n} = (1, a, b)$ が3点 A, B, C を含む平面に対し垂直になるような実数 a, b を求めよ。

点 $P(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ を、 xy 平面上の単位円周 S 上を動く点とする。ただし、 $0 < \theta < 2\pi$ とする。

- (3) 四面体 PABC の体積の最大値、および、そのときの θ の値を求めよ。

(2008 札幌医科大学・一部略)

【解答】

- (1) $\vec{AB} = (-2, -1, 3), \vec{AC} = (1, -3, 2)$,
 $|\vec{AB}| = \sqrt{14}, |\vec{AC}| = \sqrt{14}, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2 + 3 + 6 = 7$ より、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \dots \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

- (2) $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$ より、

$$-2 - a + 3b = 0, 1 - 3a + 2b = 0$$

これを解いて、 $a = 1, b = 1$

- (3) ABC を含む平面と $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ との距離 d は

$$d = \frac{|\cos \theta + \sin \theta - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3 - (\cos \theta + \sin \theta)}{\sqrt{3}}$$

$\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ で、 $0 < \theta < 2\pi$ より、 $\theta = \frac{5}{4}\pi$ のとき最大値となり、そのときの V は、

$$V = \frac{1}{3} S \frac{3 + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{7(3 + \sqrt{2})}{6}$$

④ xyz 空間で、原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と3点 $(4, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し、点 (x, y, z) がその共有点全体の集合を動くとき、積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。

(2011 京都大(理))

【解答】

平面 α の法線ベクトルは $(1, 1, 1)$ であり、 $(4, 0, 0)$ を通ることから、平面 α の方程式は $x + y + z = 4$ である。原点 O と平面 α の距離を d とすると、

$$d = \frac{4}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} < \sqrt{6}$$

より、共有点をもつ。

$xyz = k$ とする。 $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 4$ より、 $xy + yz + zx = 5$ を得る。従って、 xyz は次の t に関する3次方程式の解である。

$$t^3 - 4t^2 + 5t - k = 0$$

$u = t^3 - 4t^2 + 5t$ のグラフと $u = k$ の交点が3つになる範囲を求めればよい。(計算略) 以上より、

$$\frac{50}{27} \leq xyz \leq 2$$