

三角関数の不定積分 1

【問題】 次の不定積分を計算せよ。

$$\begin{array}{llll}
 (1) \int \sin^2 x \, dx & (2) \int \cos^2 x \, dx & (3) \int \sin^3 x \, dx & (4) \int \cos^3 x \, dx \\
 (5) \int \frac{1}{\sin x} \, dx & (6) \int \frac{1}{\cos x} \, dx & (7) \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx & (8) \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx \\
 (9) \int \tan x \, dx & (10) \int \tan^2 x \, dx & (11) \int \frac{1}{\tan x} \, dx & (12) \int \frac{1}{\tan^2 x} \, dx
 \end{array}$$

【解答】

Cを積分定数とする。

$$\begin{aligned}
 (1) \int \sin^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C
 \end{aligned}$$

※偶数乗のときは、半角の公式を使って次数を下げる。4乗のときは、半角の公式を2回使う。

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos^2 2x) \, dx = \dots$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int \sin^3 x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\
 &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int \cos^3 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx \\
 &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C
 \end{aligned}$$

※奇数乗のときは、上のように計算する。いちいち置き換えなくてもこのくらいの置換積分はすぐできるようなろう。一般的には、 $\int f(\cos x) \sin x \, dx$ の形の場合は、 $t = \cos x$ と置換する。(sin x と cos x は逆でもよい。)

$$\begin{aligned}
 (5) \int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} \, dx \\
 &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \, dx
 \end{aligned}$$

($\int f(\cos x) \sin x \, dx$ の形になったので) $t = \cos x$ と置く。 $dt = -\sin x \, dx$ より、

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \, dx &= \int \frac{-1}{1 - t^2} \, dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2}(-\log|1-t| + \log|1+t|) + C \\
 &= -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| \\
 &= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + C
 \end{aligned}$$

※半角の公式を使うと、 $\log|\tan x| + C$ とも変形できる。同様に(6)は、

$$(6) \int \frac{1}{\cos x} \, dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$$

となる。

$$(7) \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$(8) \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

※これは、覚えておく。微分の方を覚えておいて、その逆だと思ふとよい。微分の理解の仕方は次の通り。

$$\begin{aligned}
 (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
 \frac{1}{\tan x} &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}
 \end{aligned}$$

$$(9) \int \tan x \, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\log|\cos x| + C$$

※ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$ はすぐに見抜けるように特別の注意を払う。

$$(10) \int \tan^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \, dx = \tan x - x + C$$

$$(11) \int \frac{1}{\tan x} \, dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \, dx = \log|\sin x| + C$$

$$(12) \int \frac{1}{\tan^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) \, dx = -\frac{1}{\tan x} - x + C$$