

三角関数の不定積分2

【問題】 次の不定積分を計算せよ。

$$(1) \int \sin x \cos x \, dx \quad (2) \int x \sin x \, dx \quad (3) \int e^x \sin x \, dx \quad (4) \int e^{-x} \cos x \, dx$$

$$(5) \int \sin 5x \cos 3x \, dx \quad (6) \int \cos mx \cos nx \, dx \quad (m, n \text{ は自然数})$$

【解答】

Cを積分定数とする。

$$(1) \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$$

※ $\sin x \cos x$ の取り扱い、この公式か、誘導に従うくらいだから、わかりやすいかも。

(2) 部分積分より

$$\begin{aligned} \int x \sin x \, dx &= -\cos x \cdot x - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ &= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right\} \end{aligned}$$

よって、 $\int e^x \sin x \, dx = I$ とおくと、

$$I = e^x (\sin x - \cos x) - I$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

※ $J = \int e^x \cos x \, dx$ とおくと解答の1行目の式から、

$$I = e^x \sin x - J$$

同様に J の式も計算すると $J = e^x \cos x + I$ 。これらを連立することにより、 I, J 両方同時に求めることもできる。

(4) (3)と同様な計算により、 $\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C$ 。
もちろん、(3)※のように連立でも解ける。

$$\begin{aligned} (5) \int \sin 5x \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int \{\sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)\} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \\ &= -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{8} \cos 2x + C \end{aligned}$$

※積 \Rightarrow 和の公式は覚えてもいいが、作れるようになることが大事。加法定理を2つ並べて作ればよいが、

「 $\sin(5x+3x)$ と $\sin(5x-3x)$ に加法定理を使うと、 $\sin 5x \cos 3x$ が出てくる」という風に考えれば、覚えていなくても少し慣れるだけで普通にこの2行目が書けるようになる。なお、積分は線形性があるので、このような問題では積を和に直すとよい。和を積に直すのは、方程

式を解くときなどに使われる。基本的に方程式を解くときには「 $ab=0$ ならば $a=0$ または $b=0$ 」を使うので、積に直す方が都合がよい。

(6) 1) $m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \right\} \end{aligned}$$

2) $m = n$ のとき

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cos nx \, dx &= \int \cos^2 mx \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2mx) \, dx \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C \end{aligned}$$

※この不定積分を $-\pi \rightarrow \pi$ の定積分にしてみよう。

$m \neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

となる。(14)の計算のようにするとわかるが、下の2つは奇関数 \times 偶関数より奇関数だからと考えてもよい。

$m = n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi$$

よって、 $m \neq n$ のときには0、 $m = n$ のときには π になる。(三角関数の直交性という。直交したベクトルみたいに別々のものをかけたら0になるのでそのように呼ぶ。)

2つの三角関数の積を $-\pi \rightarrow \pi$ で積分すると $m \neq n$ であるならば、0になるということである。積分区間が $0 \rightarrow 2\pi$ という設定も入試では見かけるが、区間の幅が 2π であればよく、こちらも0である。

$m = n$ のときには、区間の幅が 2π での積分で π になり、区間の幅 π なら、 $\frac{\pi}{2}$ になる。