

不定積分の積分漸化式

【問題】 次の式を示せ.

$$(1) I_n = \int \sin^n x \, dx \text{ のとき, } I_n = \frac{1}{n} \{-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}\} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$(2) I_n = \int \cos^n x \, dx \text{ のとき, } I_n = \frac{1}{n} \{\sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}\} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$(3) I_n = \int \tan^n x \, dx \text{ のとき, } I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$(4) I_n = \int x^n e^x \, dx \text{ のとき, } I_n = x^n e^x - n I_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(5) I_n = \int (\log x)^n \, dx \text{ のとき, } I_n = x(\log x)^n - n I_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

【解答】

とにかく部分積分. 実際の入試には定積分で出題されるが, まずは計算が自信を持ってできるようにしっかり練習をしよう.

$$\begin{aligned} (1) I_n &= \int \sin^n x \, dx \\ &= \int \sin x \sin^{n-1} x \, dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x \\ &\quad - \int (-\cos x) (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \, dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x \, dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

よって,

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

よって,

$$I_n = \frac{1}{n} \{-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}\}$$

(2) (1)と同様なので, 各自でやること.

$$\begin{aligned} (3) I_n &= \int \tan^n x \, dx \\ &= \int \tan^2 x \tan^{n-2} x \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan^{n-2} x \, dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan^{n-2} x \, dx - I_{n-2} \end{aligned}$$

ここで, $t = \tan x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ なので,

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \tan^{n-2} x \, dx = \int t^{n-2} dt = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x + C$$

したがって,

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

$$\begin{aligned} (4) I_n &= \int x^n e^x \, dx \\ &= e^x x^n - \int e^x \cdot n x^{n-1} \, dx \\ &= x^n e^x - n I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) I_n &= \int (\log x)^n \, dx \\ &= x(\log x)^n - \int x \cdot n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x(\log x)^n - n I_{n-1} \end{aligned}$$