

整数問題の基礎

【1】2つの自然数 x, y ($x < y$) の積が588で、最大公約数が7であるとき、この2つの自然数の組 (x, y) を求めよ。

(愛知工大)

ポイントとえば、

$$x = 7x', y = 7y' \quad (x', y' \text{は互いに素})$$

と書き表すことぐらいか。後は「互いに素」の使い方に慣れること。

【解答】

最大公約数が7なので、自然数 x', y' を用いて、

$$x = 7x', y = 7y' \quad (x', y' \text{は互いに素})$$

とかける。

$$xy = 7^2 x' y' = 588 \text{より}$$

$$x' y' = \frac{588}{7^2} = 12$$

$x < y$ より $x' < y'$ で x', y' は互いに素だから

$$(x', y') = (1, 12), (3, 4)$$

よって

$$(x, y) = (7, 84), (21, 28)$$

【2】 $\sqrt{n^2 + 27}$ が整数であるような自然数 n をすべて求めよ。

(岡山県立大)

整数問題の基本は、「積の形にする」。例えば、「 $x + y = 5$ 」の整数解は無数にあり、定まらないが、「 $xy = 5$ 」の整数解なら、解は場合分けすれば何通りでもない。つまり、整数問題は「積に強い」!

【解答】

$\sqrt{n^2 + 27} = m$ とおく。ただし、 m は正の自然数とする。

$$n^2 + 27 = m^2$$

$$m^2 - n^2 = 27$$

$$(m + n)(m - n) = 3^3$$

m, n は正の自然数だから

$$m + n > m - n > 0$$

となるので

$$(m + n, m - n) = (9, 3), (27, 1)$$

の組み合わせだけである、よって

$$(m, n) = (14, 13), (6, 3)$$

求める n は3, 13

【3】 $x^2 - y^2 = 2009$ を満たす正の整数 (x, y) の組をすべて求めよ。

(横浜国立大・経、経営 一部抜粋)

両辺因数分解。 $2009 = 7^2 \cdot 41$

【略解】

$$(x, y) = (1005, 1004), (147, 140), (45, 4)$$

【4】 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ と $x \leq y$ の両方を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

(愛媛大・理、工)

超頻出問題。積に直す基本を忘れずに。

【解答】

与式を変形して

$$3y + 3x = xy$$

$$xy - 3x - 3y = 0$$

$$(x - 3)(y - 3) = 9$$

また、 $x \geq 1, y \geq 1$ より

$$x - 3 \geq -2, y - 3 \geq -2$$

$$x \leq y \text{より}$$

$$(x - 3, y - 3) = (1, 9), (3, 3)$$

よって

$$(x, y) = (4, 12), (6, 6)$$

※解答の始めの3行の式が重要!! この手のものはどの問題集にも必ずあるので、しっかり練習しておくこと。

【5】 n を自然数とする. x についての 3 次方程式 $x^3 + nx^2 + (n-6)x - 2 = 0$ の 1 つの解が自然数であるとき, 方程式の解をすべて求めよ.

(立命館大・薬)

【解答】

自然数の解を m とする.

$$m^3 + nm^2 + (n-6)m - 2 = 0$$

$$m(m^2 + nm + n - 6) = 2$$

m は自然数, $m^2 + nm + n - 6$ は整数だから,

$m = 1, 2$ に限る.

i) $m = 1$ のとき

$$1 + n + n - 6 = 2$$

$$n = \frac{7}{2}$$

n は自然数にならないので不通

ii) $m = 2$ のとき

$$2(4 + 2n + n - 6) = 2$$

$$n = 1$$

n は自然数となり適する. このとき

$$x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$$

これをとくと (計算略)

$$x = 2, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

【6】

$\frac{14}{3} < x < 5$ のとき, $\left[\frac{3}{7}x\right] - \left[\frac{3}{7}[x]\right]$ の値を求めよ.

ただし, $[x]$ は, x を超えない最大の整数を表す.

(早稲田大 改題, 一部のみ)

ガウス記号は, 一般的には,

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

もしくは, これを変形して,

$$x - 1 < [x] \leq x$$

として, 数式処理するのも多いが, 実際にはまず, 試してみたり, いじくったりするのも重要に思う.

【解答】

$$\frac{14}{3} < x < 5 \text{ より, } 2 < \frac{3}{7}x < \frac{15}{7}. \text{ よって,}$$

$$\left[\frac{3}{7}x\right] = 2$$

$$[x] = 4 \text{ より, } \left[\frac{3}{7}[x]\right] = 1. \text{ よって, 与式は } 2 - 1 = 1$$