

一次不定方程式

【例題】

x, y を自然数とする. $4x + 7y = 97$ となる x, y の組を求めよ.

(同志社大, 表記変更)

整数問題は積の形が基本的に扱いやすい. 方程式の項が2つなら, つまり, $\bigcirc = \triangle$ の形なら, 両辺を因数分解するなどして, 解き進めることができる. つまり, この問題は項が1つ多いのが難点である.

そこで, 強引だが, 定数の97を仮に0としてみよう. そうすると, $4x + 7y = 0$, つまり, $4x = -7y$ になるので, 4と7は互いに素だから, $y = 4m$ と表せて…などというように, 話が動いていく. では, どうやって97を消すのか? これは, 定石ともいえる方法がある. とにかく何でもいから, この式を満たす整数の組を一組探すのである.

【解答】

$x = 5, y = 11$ はこの式の解の1つなので,

$$\begin{aligned} 4x + 7y &= 97 \\ 4 \cdot 5 + 7 \cdot 11 &= 97 \end{aligned}$$

辺々ひくと

$$\begin{aligned} 4(x - 5) + 7(y - 11) &= 0 \\ 4(x - 5) &= -7(y - 11) \end{aligned}$$

より, 4と7は互いに素なので,
 $y - 11 = 4m$ (m は整数) とかける.
このとき,

$$\begin{aligned} 4(x - 5) &= -7 \cdot 4m \\ x &= -7m + 5 \end{aligned}$$

x, y は自然数だから

$$x = -7m + 5 \geq 0, y = 4m + 11 \geq 0$$

よって

$$-\frac{11}{4} \leq m \leq \frac{5}{7}$$

m は整数だから

$$m = -2, -1, 0$$

よって

$$(x, y) = (19, 3), (12, 7), (5, 11)$$

※ $x = 5, y = 11$ 以外の組を見つけたとしても, 答えは同じ.

※ 1組見つけて, 辺々引くのは常套手段. しっかりマスターしておこう.

【1】 $2x + 25y = 1993$ を満たす整数 x, y のうち, x と y の差の絶対値が最も小さいものを求めよ.

(お茶の水女子大)

【解答】

$x = 9, y = 79$ はこの式の解の1つなので,

$$\begin{aligned} 2x + 25y &= 1993 \\ 2 \cdot 9 + 25 \cdot 79 &= 1993 \end{aligned}$$

辺々ひくと

$$2(x - 9) = -25(y - 79)$$

2と25は互いに素なので,

$y - 79 = 2m$ (m は整数) とかける.

このとき,

$$\begin{aligned} 2(x - 9) &= -25 \cdot 2m \\ x &= -25m + 9 \end{aligned}$$

よって, $(x, y) = (-25m + 9, 2m + 79)$

$$\begin{aligned} |x - y| &= |-25m + 9 - 2m - 79| \\ &= |-27m - 70| \end{aligned}$$

よって, $m = -3$ のとき, 最小値11をとる.

このとき, $(x, y) = (84, 73)$

【2】 n を整数とするとき, x, y の方程式

$$2x + 3y = n$$

について,

(1) この式を満たす整数 x, y の組を求めよ.

(2) $n = 100$ のとき, この式を満たす正の整数 x, y は何組あるか.

(東京理科大, 改題)

【解答】

(1) $x = 2n, y = -n$ は解の1つなので,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= n \\ 2 \cdot 2n + 3 \cdot (-n) &= n \end{aligned}$$

を辺々引いて

$$\begin{aligned} 2(x - 2n) + 3(y + n) &= 0 \\ 2(x - 2n) &= -3(y + n) \end{aligned}$$

2と3は互いに素だから,

$y + n = 2k$ とおける (k は任意の整数)

このとき

$$\begin{aligned} 2(x - 2n) &= -3 \cdot 2k \\ x &= 2n - 3k \end{aligned}$$

よって, $(x, y) = (2n - 3k, -n + 2k)$

(2) $x = 200 - 3k > 0, y = -100 + 2k > 0$ より

$$50 < k < \frac{200}{3} = 66. \dots$$

k は整数なので, 16組.

【3】1以上の整数全体の集合を N とし、その部分集合

$$S = \{3x + 7y \mid x, y \in N\}$$

を考える。 S はある整数 n 以上のすべての整数を含むことを示し、そのような n の最小値を求めよ。

(お茶の水女子大)

【解答】

$$3x + 7y = n \cdots \textcircled{1} \text{とする.}$$

$x = -2n, y = n$ は解の1つであるから,

$$3 \cdot (-2n) + 7 \cdot n = n \cdots \textcircled{2}$$

①-②より,

$$3(x + 2n) + 7(y - n) = 0$$

$$3(x + 2n) = -7(y - n)$$

3と7は互いに素だから,

$$y - n = 3m \text{ (} m \text{は整数)}$$

とかける. このとき

$$3(x + 2n) = -7 \cdot 3m$$

$$x = -2n - 7m$$

よって

$$(x, y) = (-2n - 7m, 3m + n)$$

$x > 0, y > 0$ より

$$-2n - 7m > 0 \text{ かつ } 3m + n > 0$$

よって

$$-\frac{n}{3} < m < -\frac{2}{7}n \cdots \textcircled{3}$$

これを満たす整数 m が存在するためには

$$-\frac{2}{7}n - \left(-\frac{n}{3}\right) > 1$$

$$\frac{n}{21} > 1$$

よって S は22以上のすべての自然数 n を含む. また,
 $n = 21$ のとき, ③を満たす整数は存在しない. したがって, 最小値は22

※下から3行目は大事

整数 m が存在 \Rightarrow 不等式の「幅」が1より大