

積を作る（応用）

【例題】

$3^n = k^3 + 1$ を満たす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。

（千葉大，（1）のみ）

積を作るのが基本方針ですので，右辺をまず，因数分解する。

【解答】

$$3^n = (k+1)(k^2 - k + 1) \text{ より,}$$

$1 \leq a \leq n$ をみたす整数 a を用いて

$$k+1 = 3^a, \quad k^2 - k + 1 = 3^{n-a} \dots *$$

とかける．第1式より

$$k = 3^a - 1. \text{ これを第2式に代入すると}$$

$$(3^a - 1)^2 - (3^a - 1) + 1 = 3^{n-a}$$

整理すると

$$3^{2a} - 3^{a+1} + 3 = 3^{n-a}$$

両辺を3でわって

$$3^{2a-1} - 3^a + 1 = 3^{n-a-1}$$

$$3^a(3^{a-1} - 1) + 1 = 3^{n-a-1}$$

左辺は3でわると1余る数なので， 3^{n-a-1} も3でわると1余る数にならなければならない．したがって

$$3^{n-a-1} = 1$$

よって， $a = n - 1$

*の第2式に代入すると

$$k^2 - k + 1 = 3$$

$k > 0$ より

$$k = 2$$

よって，第1式から $n = 2$ なので，

$$(k, n) = (2, 2)$$

【1】正の整数 n と m に対して， $3^n + (117)^2 = m^2$ が成り立っている．このとき n と m を求めよ。

（東京理科大）

【略解】

$$m^2 - (117)^2 = 3^n$$

$$(m+117)(m-117) = 3^n$$

$m+117 = 3^a$ ， $m-117 = 3^{n-a}$ とおき， m を消去する．以下は自力でがんばろう．

答え… $a = 5$ より， $n = 7, m = 126$.

【2】

(1) p を2とは異なる素数とする． $m^2 = n^2 + p^2$ を満たす自然数の組 (m, n) がただ1組存在することを証明せよ．

(2) $m^2 = n^2 + 12^2$ を満たす自然数の組 (m, n) をすべて求めよ．

（静岡大・理）

p は素数なので， $p^2 = 1 \cdot p^2$ ， $p \cdot p$ くらいにしか分けようがない．したがって， p^2 に注目して変形していく．

【解答】

(1)

$$p^2 = m^2 - n^2$$

$$p^2 = (m+n)(m-n)$$

$m+n > m-n$ より，

$$(m+n, m-n) = (p^2, 1)$$

である．

$n = m - 1$ を $m+n = p^2$ に代入して計算すると，

$$m = \frac{p^2 + 1}{2}, \quad n = \frac{p^2 - 1}{2}$$

となり，これらは自然数である．よって，この組のみが条件を満たす．

(2)

$$12^2 = (m+n)(m-n)$$

$m+n > m-n$ で， $m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致するが，左辺が偶数なので，ともに偶数である．

$12^2 = 2^4 \cdot 3^2$ より，

$$(m+n, m-n) = (2^3 \cdot 3^2, 2), (2^2 \cdot 3^2, 2^2),$$

$$(2^1 \cdot 3^2, 2^3), (2^3 \cdot 3, 2 \cdot 3)$$

これを解いて，

$$(m, n) = (37, 35), (20, 16), (13, 5), (15, 9)$$