

積をつくれないうちの絞り込み

【1】 $x^2 + y^2 = 41$ を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

(横浜国立大・経, 経営 一部抜粋)

そもそも, $7^2 = 49$ だから, 1~6 までについて調べればよく, 数えても大したことはない。

【解答】

$y^2 = 41 - x^2 > 0$ で, x は正の整数であるから,

$$0 < x \leq \sqrt{41}$$

よって, $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ このうち, y が正の整数になるものを選ぶと,

$$(x, y) = (4, 5), (5, 4)$$

【2】 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x + 6y + 1 = 0$ を満たす整数の組 (x, y) を求めよ。

(拓殖大)

整数問題なので, 普通は積の形に直す, それができないときにはどうするかが問題。

【解答】

$$x^2 - 2(y+2)x + 2y^2 + 6y + 1 = 0$$

$$x = y + 2 \pm \sqrt{-y^2 - 2y + 3}$$

x は実数なので, $-y^2 - 2y + 3 \geq 0$ よって,

$$-3 \leq y \leq 1$$

よって, $y = -3, -2, -1, 0, 1$

このうち, x が整数になるものをさがすと,

$$(x, y) = (-1, -3), (3, -1), (-1, -1), (3, 1)$$

【3】 l, m, n を自然数とする. 次の間に答えよ。

(1) $m \leq n$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ を満たす組 (m, n) を

すべて求めよ。

(2) $l \leq m \leq n$ のとき, $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ と $\frac{3}{l}$ の大きさを

比較せよ。

(3) $l \leq m \leq n$, $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$ を満たす組 (l, m, n)

をすべて求めよ。

(東北学院大)

(1) は分母を払って因数分解型で終了. (2) はよくある絞り込み方なので, 身に付けるようにしよう。

【解答】

(1) (計算略) 分母を払い因数分解して計算する。

$$(m-2)(n-2) = 4$$

から, $(m, n) = (3, 6), (4, 4)$

(2) $l \leq m \leq n$ より,

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{l} + \frac{1}{l} + \frac{1}{l} = \frac{3}{l}$$

(3)(2) より

$$1 = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{l}$$

なので $l = 1, 2, 3$

(i) $l = 1$ のとき

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 0$$

となり, $m > 0, n > 0$ なので不適。

(ii) $l = 2$ のとき

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

(1) より, $(l, m, n) = (2, 3, 6), (2, 4, 4)$

(iii) $l = 3$ のとき

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$$

より、 $m \leq 3$ だが、 $l \leq m$ より、 $m = 3$

また、これらを代入して、 $n = 3$

よって $(l, m, n) = (3, 3, 3)$

よって

$$(l, m, n) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$$

【4】 n を正の整数とする. 実数 x, y, z に対する方程式 $x^n + y^n + z^n = xyz \cdots \textcircled{1}$ を考える.

(1) $n = 1$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) で、 $x \leq y \leq z$ となるものをすべて求めよ.

(2) $n = 3$ のとき、 $\textcircled{1}$ を満たす正の整数の組 (x, y, z) は存在しないことを示せ.

(2006 東京大)

【解答】

(1) $x \leq y \leq z$ より、

$$xyz = x + y + z \leq 3z$$

よって、 $xy \leq 3$. x, y は正の整数だから

$$(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$$

あとはそれぞれの場合を調べる

… (計算略)

よって、

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

(2) $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$ より

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = -2xyz$$

この式の左辺は

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= (x + y + z) \cdot \frac{1}{2} \{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$$

$$\geq 0$$

一方、右辺は負になるので、この等式をみたす

(x, y, z) は存在しない.

【別解】

(1) $\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = 1$ と変形できるので、

$$1 = \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

より、 $x = 1$. あとは因数分解型の不定方程式となる.

(2) 同様に

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = 1$$

とすると

$$\frac{z^2}{xy} \geq \frac{z^2}{z \cdot z} = 1$$

$\frac{x^2}{yz} > 0$, $\frac{y^2}{zx} > 0$ より、この式は成立しない.

※別解を含めて、どの解き方も重要なので、きちんと身に付けよう.